Potenzen und Wurzeln

1.) Potenzen mit natürlichen und ganzen Exponenten:

Potenz: 2^5

Exponent

Basis

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

MERKE:

Ein Produkt aus gleichen Faktoren lässt sich als Potenz schreiben

aber:

$$5 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$
$$3 \cdot x = x + x + x$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$
$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$
$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$
$$(-2)^1 = (-2) = -2$$
$$(-2)^{10} = 1024$$
$$(-2)^{11} = -2048$$

MERKE:

Für eine Potenz mit negativer Basis gilt: Ist der Exponent gerade, so ist das Ergebnis positiv, ist der Exponent ungerade, so ist das Ergebnis negativ,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

aber:

$$\frac{2^2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$0{,}2^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$$
$$0{,}1^4 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}0001$$
$$(-0{,}03)^3 = (-0{,}03) \cdot (-0{,}03) \cdot (-0{,}03) = -0{,}000027$$

$$(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9$$
$$(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

Potenzen mit Taschenrechner (TR)

(Exponentenschreibweise)

Aufgabe:

Gib in den Taschenrechner ein: 300^5 und $223{,}4^6$

TR: 300 $\boxed{\wedge}$ =

Der Taschenrechner liefert folgendes Ergebnis, das mit Hilfe einer Zehnerpotenz angegeben wird:

$300^5 = 2{,}43 \cdot 10^{12} = 2{,}43 \cdot 1.000.000.000.000 = 2.430.000.000.000$

Das Ergebnis wird mit einer Zahl zwischen 1 und 10 (2,43) und einer Zehnerpotenz (10^{12}) angegeben!

Das Komma wird um 12 Stellen (10^{12}) nach rechts verschoben!

$223{,}45^6 = 1{,}244750055 \cdot 10^{14} = 124.475.005.500.000$

Das Ergebnis wird mit einer Zahl zwischen 1 und 10 (1,2447...) und einer Zehnerpotenz (10^{14}) angegeben!

Das Komma wird um 14 Stellen (10^{14}) nach rechts verschoben!

MERKE:

Exponentenschreibweise:

Um große Zahlen übersichtlich darzustellen, schreibt man sie als Produkt einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer 10er-Potenz.
Diese Schreibweise wird sehr häufig in den Naturwissenschaften angewendet (Scientific Notation)

Schreibe in der Exponentenschreibweise:

$4385 = 4{,}385 \cdot 10^3$

$750.000 = 7{,}5 \cdot 10^5$

$149.000.000 \text{ km} = 1{,}49 \cdot 10^8 \text{ km}$

$9.460.000.000.000 \text{ km} = 9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ km}$

Berechne mit dem Taschenrechner:

$44.000.000.000 \cdot 16.000.000.000.000 =$

$4{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{13} = 7{,}04 \cdot 10^{23} = 704.000.000.000.000.000.000.000$

Für die Speicherung von Informationen beim Computer verwendet man die Maßeinheit Byte (8 Bit):

1 Kilobyte =	2^{10} Byte = 1024 Byte	ca. 10^3 Byte = 1000 Byte
1 Megabyte =	2^{20} Byte = 1048576 Byte	ca. 10^6 Byte = 1.000.000 Byte
1 Gigabyte =	2^{30} Byte = 1073741824 Byte	ca. 10^9 Byte = 1.000.000.000 Byte

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis

Multiplikation:

1.) $5^3 \cdot 5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \ \cdot \ 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$

2.) $a^2 \cdot a^4 = a \cdot a \ \cdot \ a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$

3.) $4x^3 \cdot 3x^2 = 4 \cdot x \cdot x \cdot x \ \cdot \ 3 \cdot x \cdot x = 12x^6$

4.) $a^{x+1} \cdot a^{x+3} = a^{x+1+x+3} = a^{2x+4}$

MERKE:

Man multipliziert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält. Treten Vorzahlen auf, so werden sie multipliziert

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

aber: $2x^3 + 3x^2 = 2x^3 + 3x^2$

und: $2x^2 + 3x^2 = 5x^2$

Division:

1.) $6^4 : 6^3 = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 6^1 = 6$

2.) $a^5 : a^2 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^3$

3.) $4x^5 : 2x^3 = \frac{4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{2 \cdot x \cdot x \cdot x} = 2x^2$

4.) $a^{3x} : a^x = \frac{a^{3x}}{a^x} = a^{3x-x} = a^{2x}$

5.) $b^{x+2} : b^{x+1} = \frac{b^{x+2}}{b^{x+1}} = b^{(x+2)-(x+1)} = b^{x+2-x-1} = b^1 = b$

MERKE:

Man dividiert Potenzen mit gleicher Basis, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält. Treten Vorzahlen auf, so werden sie dividiert.

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

Löse die Klammern auf:

1.) $x^3 \cdot (x^2 - x^4) = x^5 - x^7$

2.) $2y^2 \cdot (y^3 + 3y^2 - 4y) = 2y^5 + 6y^4 - 8y^3$

3.) $(4a^2 + b^2) \cdot (3a^2 - 2b^2) = 12a^4 - 8a^2b^2 + 3a^2b^2 - 2b^4 = 12a^4 - 5a^2b^2 - 2b^4$

4.) $(3x^3 - 2x^2)^2 = 9x^6 - 12x^5 + 4x^4 \rightarrow$ Binomische Formel!

Klammere aus:

1.) $x^4 + x^3 + x^2 = x^2 \cdot (x^2 + x + 1)$
2.) $4a^3 + 6a^4 - 2a^2 = 2a^2 \cdot (2a + 3a^2 - 1)$

MERKE:

Potenzen lassen sich nur addieren oder subtrahieren, wenn der Exponent und die Basis gleich sind. Man addiert oder subtrahiert dann die Vorzahlen und behält die Potenz bei.

Beispiele:

1.) $2x^2 + 5x^2 = 7x^2$ aber : $2x^2 \cdot 5x^2 = 10x^4$
2.) $-4a^3 - 2a^3 = -6a^3$ aber : $(-4a^3) \cdot (-2a^3) = 8a^6$
3.) $6y^3 - y^3 - 8y^3 + 3y^3 = 0$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichen Exponenten

1.) Multiplikation:

$$\begin{aligned} 20^4 \cdot 5^4 &= 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 20 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 5 \\ &= 100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 \\ &= 100^4 \end{aligned}$$

$$a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b = (a \cdot b)^3$$

$$(4x)^3 = 4x \cdot 4x \cdot 4x = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot x = 64x^3$$

MERKE:

Man multipliziert Potenzen mit gleichen Exponenten, indem man die Basis multipliziert und den Exponenten beibehält.

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$
$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

Man potenziert ein Produkt, indem man jeden Faktor potenziert.

2.) Division:

$$8^4 : 2^4 = \frac{8^4}{2^4} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$$

$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

MERKE:

Man dividiert Potenzen mit gleichen Exponenten, indem man die Basis dividiert und den Exponenten beibehält.

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Man potenziert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner potenziert.

Potenzieren von Potenzen

1.) $(6^2)^3 = 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 = 6^6$ oder : $6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 = (6 \cdot 6 \cdot 6)^2 = (6^3)^2 = 6^3 \cdot 6^3 = 6^6$

2.) $(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{12}$

MERKE:

Man potenziert eine Potenz, indem man die Exponenten multipliziert.

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} = a^{xy}$$

Potenzrechnung (I)

Vereinfache so weit wie möglich mit Hilfe der Potenzgesetze:

1.) $6x^3 + 2x^3 - 4x^2 - 5x^3 + 3x^2 =$

2.) $(3a^2 + 4a) \cdot (6a - 2a^2) =$

3.) $a^5 \cdot a^4 =$

4.) $x^{2n+1} \cdot x^{n-1} =$

5.) $\frac{a^{x-1}}{a^{x-2}} =$

6.) $\frac{a^3b^4}{b^8} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a}{b} =$

7.) $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 =$

8.) $(ax^2)^n \cdot (bx)^n =$

9.) $\frac{(x^3y^2)^a}{(x^2y)^a} =$

10.) $(x^{a+1})^{a+1} =$

11.) $\left(\frac{x \cdot \sqrt{2}}{y \cdot \sqrt{3}}\right)^4 \cdot \left(\frac{y^2 \cdot \sqrt{6}}{x \cdot \sqrt{8}}\right)^4 =$

12.) $\left(\frac{x^2y^2}{a^2}\right)^n \cdot \left(\frac{ab}{xy^2}\right)^n \cdot \left(\frac{a^2}{xy}\right)^n =$

13.) $(4ax)^2 + (3ax)^2 - (2ax)^2 =$

14.) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^6 =$

15.) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x =$

16.) $\frac{a^{x+2} \cdot a^{x+4}}{a^{x+3} \cdot a^{x+1}} =$

17.) $(3x^2 + y) \cdot (x^2 + 3y - 4) =$

18.) $3 \cdot (ab)^2 - 2a^2b^2 + (4ab)^2 =$

19.) $\frac{24x^3y^2}{18x^2y} \cdot \frac{9xy^2}{15x^2y^3} =$

20.) $(4\sqrt{x})^2 \cdot (3\sqrt{x})^2 \cdot (2\sqrt{x})^2 \cdot (\sqrt{x})^2 =$

21.) $(4\sqrt{x})^2 + (3\sqrt{x})^2 + (2\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x})^2 =$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \Leftrightarrow (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = a^x : b^x$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$$

Potenzrechnung (I) (Lösungen)

Vereinfache so weit wie möglich mit Hilfe der Potenzgesetze:

1.) $6x^3 + 2x^3 - 4x^2 - 5x^3 + 3x^2 = 3x^3 - x^2$

2.) $(3a^2 + 4a) \cdot (6a - 2a^2) = 18a^3 - 6a^4 + 24a^2 - 8a^3 = 10a^3 - 6a^4 + 24a^2$

3.) $a^5 \cdot a^4 = a^9$

4.) $x^{2n+1} \cdot x^{n-1} = x^{2n+1+n-1} = x^{3n}$

5.) $\dfrac{a^{x-1}}{a^{x-2}} = a^{(x-1)-(x-2)} = a^{x-1-x+2} = a$

6.) $\dfrac{a^3b^4}{b^8} \cdot \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{a^3 \cdot b^4 \cdot b^2 \cdot a}{b^8 \cdot a^2 \cdot b} = \dfrac{a^4 \cdot b^6}{b^9 \cdot a^2} = \dfrac{a^2}{b^3}$

7.) $a^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = (abc)^3$

8.) $(ax^2)^n \cdot (bx)^n = a^n \cdot x^{2n} \cdot b^n \cdot x^n = a^n b^n x^{3n}$

9.) $\dfrac{(x^3y^2)^a}{(x^2y)^a} = \dfrac{x^{3a} \cdot y^{2a}}{x^{2a} \cdot y^a} = x^a y^a = (xy)^a$

10.) $(x^{a+1})^{a+1} = x^{(a+1)\cdot(a+1)} = x^{a^2+2a+1}$

11.) $\left(\dfrac{x \cdot \sqrt{2}}{y \cdot \sqrt{3}}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{y^2 \cdot \sqrt{6}}{x \cdot \sqrt{8}}\right)^4 = \left(\dfrac{x \cdot \sqrt{2}}{y \cdot \sqrt{3}} \cdot \dfrac{y^2 \cdot \sqrt{6}}{x \cdot \sqrt{8}}\right)^4 = \left(\dfrac{y \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^4 = \dfrac{4y^4}{16} = \dfrac{1}{4}y^4$

12.) $\left(\dfrac{x^2y^2}{a^2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{ab}{xy^2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{a^2}{xy}\right)^n = \left(\dfrac{x^2y^2}{a^2} \cdot \dfrac{ab}{xy^2} \cdot \dfrac{a^2}{xy}\right)^n = \left(\dfrac{ab}{y}\right)^n = \dfrac{a^n b^n}{y^n}$

13.) $(4ax)^2 + (3ax)^2 - (2ax)^2 = 16a^2x^2 + 9a^2x^2 - 4a^2x^2 = 21a^2x^2$

14.) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^6 = \dfrac{a^2}{x^2} \cdot \dfrac{a^3}{x^3} = \dfrac{a^5}{x^5} = \left(\dfrac{a}{x}\right)^5$

15.) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4}\right)^x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

16.) $\dfrac{a^{x+2} \cdot a^{x+4}}{a^{x+3} \cdot a^{x+1}} = \dfrac{a^{2x+6}}{a^{2x+4}} = a^{(2x+6)-(2x+4)} = a^{2x+6-2x-4} = a^2$

17.) $(3x^2 + y) \cdot (x^2 + 3y - 4) = 3x^4 + 9x^2y - 12x^2 + x^2y + 3y^2 - 4y = 3x^4 + 10x^2y - 12x^2 + 3y^2 - 4y$

18.) $3 \cdot (ab)^2 - 2a^2b^2 + (4ab)^2 = 3a^2b^2 - 2a^2b^2 + 16a^2b^2 = 17a^2b^2$

19.) $\dfrac{24x^3y^2}{18x^2y} \cdot \dfrac{9xy^2}{15x^2y^3} = \dfrac{4x^3y^2}{x^2y} \cdot \dfrac{xy^2}{5x^2y^3} = \dfrac{4x^4y^4}{5x^4y^4} = \dfrac{4}{5}$

20.) $(4\sqrt{x})^2 \cdot (3\sqrt{x})^2 \cdot (2\sqrt{x})^2 \cdot (\sqrt{x})^2 = 16x \cdot 9x \cdot 4x \cdot x = 576x^4$

21.) $(4\sqrt{x})^2 + (3\sqrt{x})^2 + (2\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x})^2 = 16x + 9x + 4x + x = 30x$

Potenzfunktion mit natürlichen Exponenten

1.) Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle und/oder mit Hilfe des Taschenrechners folgende Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem mit unterschiedlichen Farben ein:

$f_1(x) = x^1 \qquad f_2(x) = x^2 \qquad f_3(x) = x^3 \qquad f_4(x) = x^4 \qquad f_5(x) = x^5$

2.) Finde auf Grund des Verlaufs der 4 Funktionen ihre Besonderheiten und ihre Gemeinsamkeiten (gemeinsame Punkte, Symmetrie usw.) heraus.
Notiere diese Besonderheiten und Gemeinsamkeiten der Funktion $f(x) = x^n$ mit $x \in R$; $n \in N$.

3.) Zeichne folgende Funktionen in ein neues Koordinatensystem ein:

$f_1(x) = 2x^2 - 3 \qquad f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3 \qquad f_3(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3 \qquad f_4(x) = 0{,}2\,x^5 - 1$

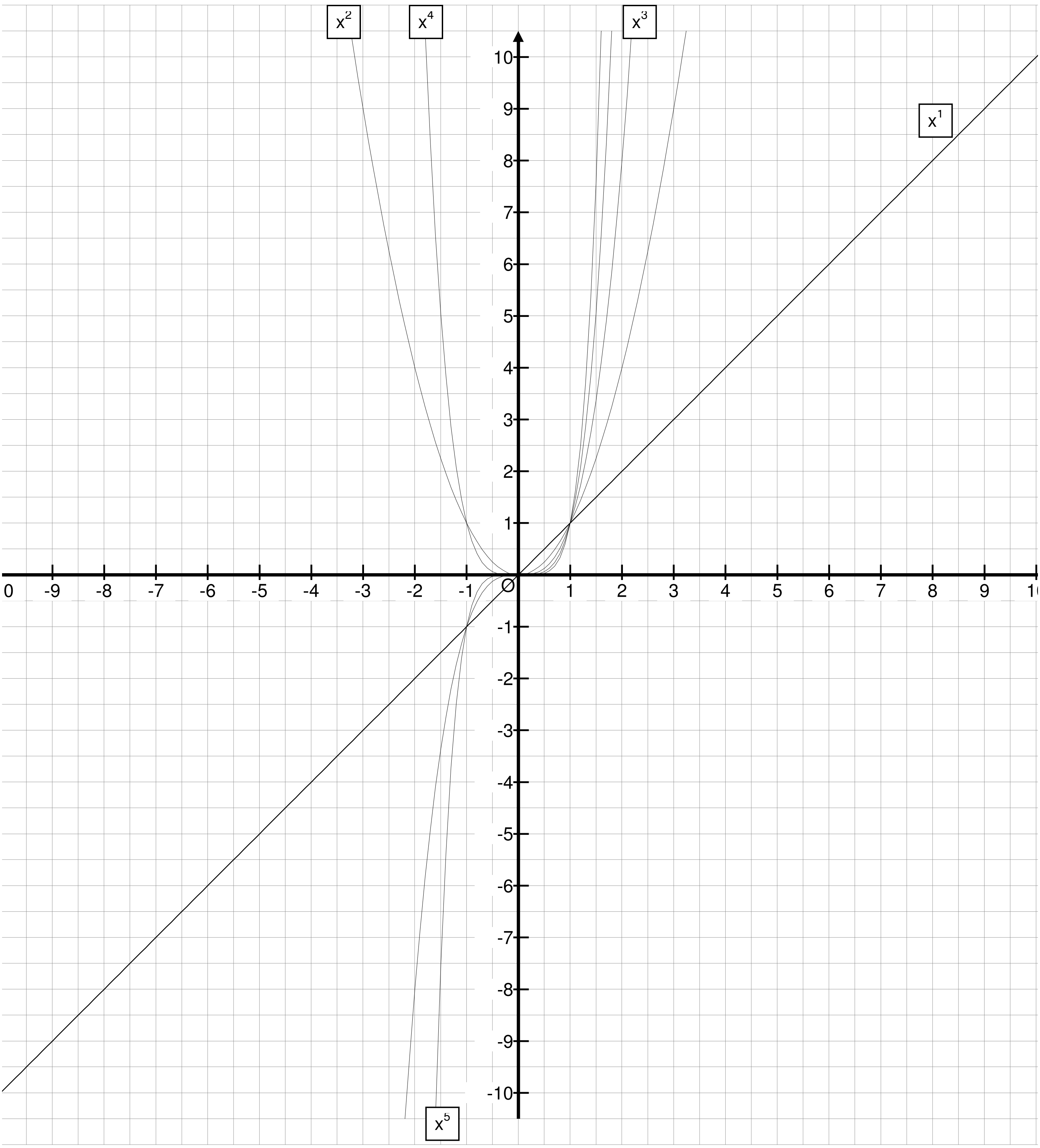
Überlege dazu zuerst, welche Auswirkungen die hinzugefügten Werte auf den Verlauf der Funktion besitzen. Finde danach mit Hilfe einer Wertetabelle und/oder mit Hilfe des Taschenrechners Punkte der Funktionen heraus und zeichne die 4 unterschiedlichen Funktionen mit verschiedenen Farben ein.

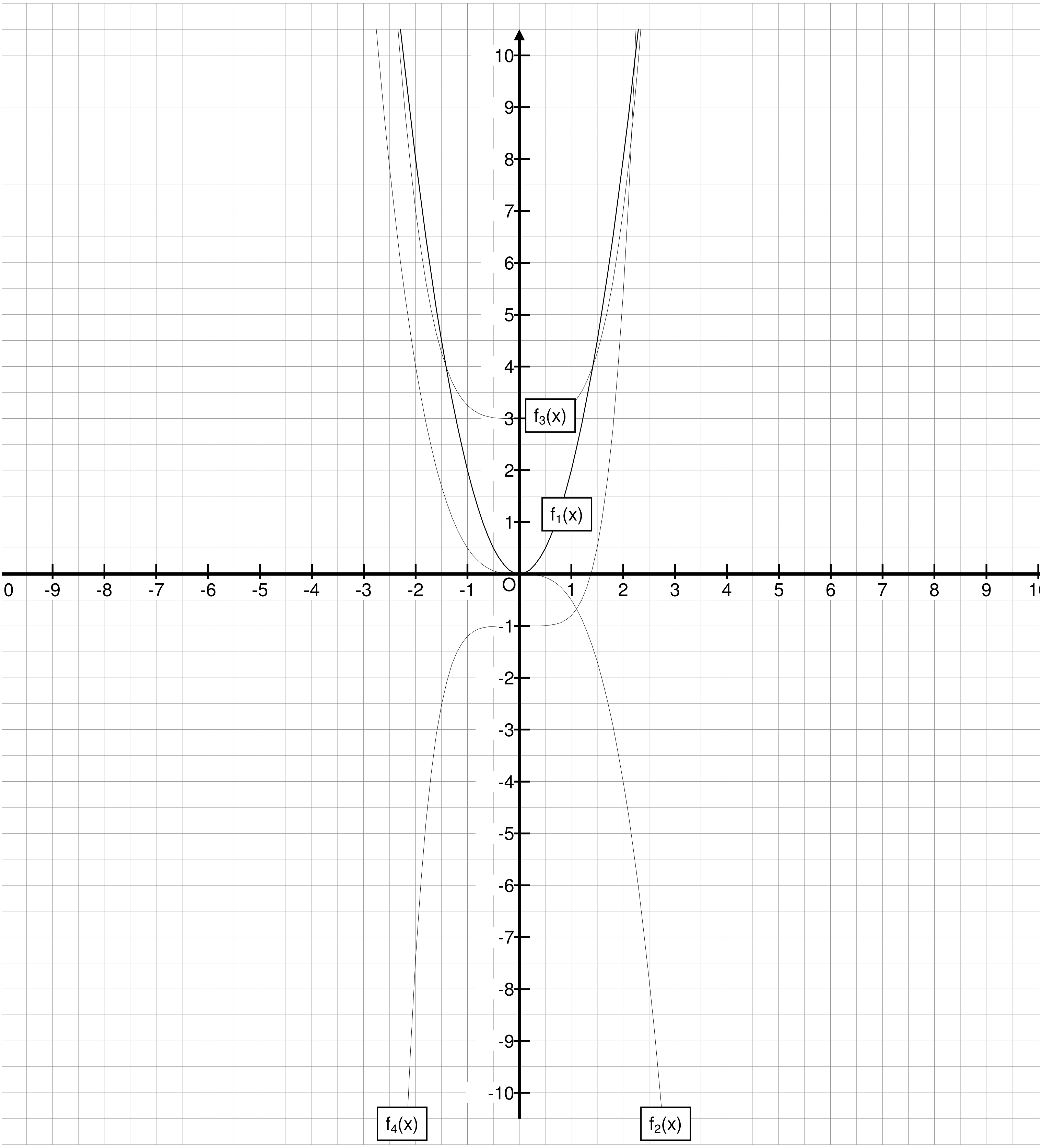
4.) Notiere: Gegeben ist die Funktion $f(x) = a \cdot x^n + c$ mit $a, c, x \in R$; $n \in N$
Was bewirkt der Faktor a in der Funktion?
Was bewirkt der absolute Wert c in der Funktion?

➢ <u>Deine Notizen:</u>

zu 2.)

zu 4.)


x^2
x^4
x^3
x^1
x^5
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
O
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9



$f_3(x)$
$f_1(x)$
$f_4(x)$
$f_2(x)$
O
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9

MERKE:

Für den Verlauf der Funktion $y = f(x) = x^n \quad x \in R ; n \in N$ gilt:

1.) Der Exponent ist gerade:

a.) Funktion verläuft im **II**. und **I**. Bereich des KS.
b.) Funktion ist Achsensymmetrisch zur y-Achse.
c.) für x<0 fällt die Funktion, für x>0 steigt die Funktion.
d.) gemeinsame Punkte: (1/1), (0/0), (-1/1).

2.) Der Exponent ist ungerade:

a.) Funktion verläuft im **III**. und **I**. Bereich des KS.
b.) Die Funktion ist Punktsymmetrisch zu (0/0)
c.) für x<0 und x>0 steigt die Funktion
d.) gemeinsame Punkte: (1/1), (0/0), (-1/-1).

3.) Für $y = f(x) = a \cdot x^n + c$ mit $a , c , x \in R ; n \in N$ gilt :

a.) a ist verantwortlich für eventuelle Spiegelung, Streckung oder Stauchung des Graphen.
b.) c ist verantwortlich für eine Verschiebung des Scheitelpunktes entlang der y-Achse.

Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten

1.) $5^3 : 5^5 = 5^{3-5} = 5^{-2} \Rightarrow$ nach den Potenzgesetzen

2.) $5^3 : 5^5 = \frac{5^3}{5^5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{25}$

3.) $3^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$

4.) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{1}\right)^{3} = 4^3 = 64$

5.) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

6.) $(0{,}1)^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{1}\right)^{3} = 1000$

MERKE:

Negativer Exponent bedeutet: Bilde den Kehrwert der Basis mit einem positiven Exponenten.

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^{n} \qquad \text{oder:} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^{n} \qquad \boxed{x^0 = 1}$$

Zehnerpotenzen mit negativen Exponenten

10^{12}	(Tera)	$= 1.000.000.000.000$	1 Terabyte $\approx$ 1.000.000.000.000 Bytes
10^{9}	(Giga)	$= 1.000.000.000$	1 Gigabyte $\approx$ 1.000.000.000 Bytes
10^{6}	(Mega)	$= 1.000.000$	1 Megabyte $\approx$ 1.000.000 Bytes
10^{3}	(Kilo)	$= 1.000$	1 Kilobyte $\approx$ 1.000 Bytes
10^{0}		$= 1$	
10^{-3}	(Milli)	$= \frac{1}{1000} = 0{,}001$	1 Millimeter $= \frac{1}{1000}$ Meter
10^{-6}	(Mikro)	$= \frac{1}{1.000.000} = 0{,}000000001$	1 Mikrometer $= \frac{1}{1.000.000}$ Meter
10^{-9}	(Nano)	$= \frac{1}{1.000.000.000} = 0{,}000000000001$	1 Nanometer $= \frac{1}{1.000.000.000}$ Meter
10^{-12}	(Piko)	$= \frac{1}{1.000.000.000.000} = 0{,}000000000000001$	1 Pikometer $= \frac{1}{1.000.000.000.000}$ Meter

Unser Zahlensystem lässt sich somit mit Hilfe der Zehnerpotenzen erklären:

3	5	8	7	1	,	2	0	9	4
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
ZT	T	H	Z	E	,	z	h	t	zt

Exponentenschreibweise für kleine Zahlen

1.) $0{,}2^{15}$ $= 3{,}2768 \cdot 10^{-11} = 3{,}2768 \cdot 0{,}00000000001$
$= 0{,}000000000032768$

2.) $0{,}36^{21}$ $= 4{,}812298034 \cdot 10^{-10} = 4{,}812298034 \cdot 0{,}0000000001$
$= 0{,}0000000004812298034$

MERKE:

Exponentenschreibweise:

Um kleine Zahlen übersichtlich darzustellen, schreibt man sie als Produkt einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer negativen 10er-Potenz.
Diese Schreibweise wird sehr häufig in den Naturwissenschaften angewendet (Scientic Notation)

Potenzgesetze für negative Exponenten

1.) $a^{-7} \cdot a^{-5} = a^{-7+(-5)} = a^{-7-5} = a^{-12} = \left(\frac{1}{a}\right)^{12}$

$$a^{-7} \cdot a^{-5} = \left(\frac{1}{a}\right)^{7} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{5} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} \cdot \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^{12}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{12}$$

2.) $x^{-3} : x^{-2} = x^{-3-(-2)} = x^{-3+2} = x^{-1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{1} = \frac{1}{x}$

$$x^{-3} : x^{-2} = \frac{x^{-3}}{x^{-2}} = \frac{x^{2}}{x^{3}} = \frac{x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x}$$

3.) $a^{-3} \cdot b^{-3} = (a \cdot b)^{-3} = \frac{1}{(ab)^3} = \frac{1}{a^3 b^3}$

$$a^{-3} \cdot b^{-3} = \left(\frac{1}{a}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{1}{a^3 b^3}$$

4.) $x^{-2} : y^{-2} = (x : y)^{-2} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y}{x}\right)^{2} = \frac{y^2}{x^2}$

$$x^{-2} : y^{-2} = \left(\frac{1}{x}\right)^{2} : \left(\frac{1}{y}\right)^{2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{y^2}{1} = \frac{y^2}{x^2}$$

MERKE:

Die bisher angewendeten Potenzgesetze gelten auch für Rechnungen mit negativen Exponenten.

Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten

1.) Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle und/oder mit Hilfe des Taschenrechners folgende Funktionen mit unterschiedlichen Farben in das beiliegende Koordinatensystem ein:

$f_1(x) = x^{-1}$ $\qquad$ $f_2(x) = x^{-2}$ $\qquad$ $f_3(x) = x^{-3}$ $\qquad$ $f_4(x) = x^{-4}$

2.) Finde auf Grund des Verlaufs der 4 Funktionen ihre Besonderheiten und ihre Gemeinsamkeiten (gemeinsame Punkte, Symmetrie usw.) heraus.
Wie sieht es mit f (0) aus?
Wie sieht es mit kleinen Werten $f\left(\frac{1}{10}\right)$; $f\left(\frac{1}{100}\right)$; $f\left(\frac{1}{1000}\right)$ aus?
Wie sieht es mit großen Werten $f(10)$; $f(100)$; $f(1000)$ aus?
Notiere diese Besonderheiten und Gemeinsamkeiten.

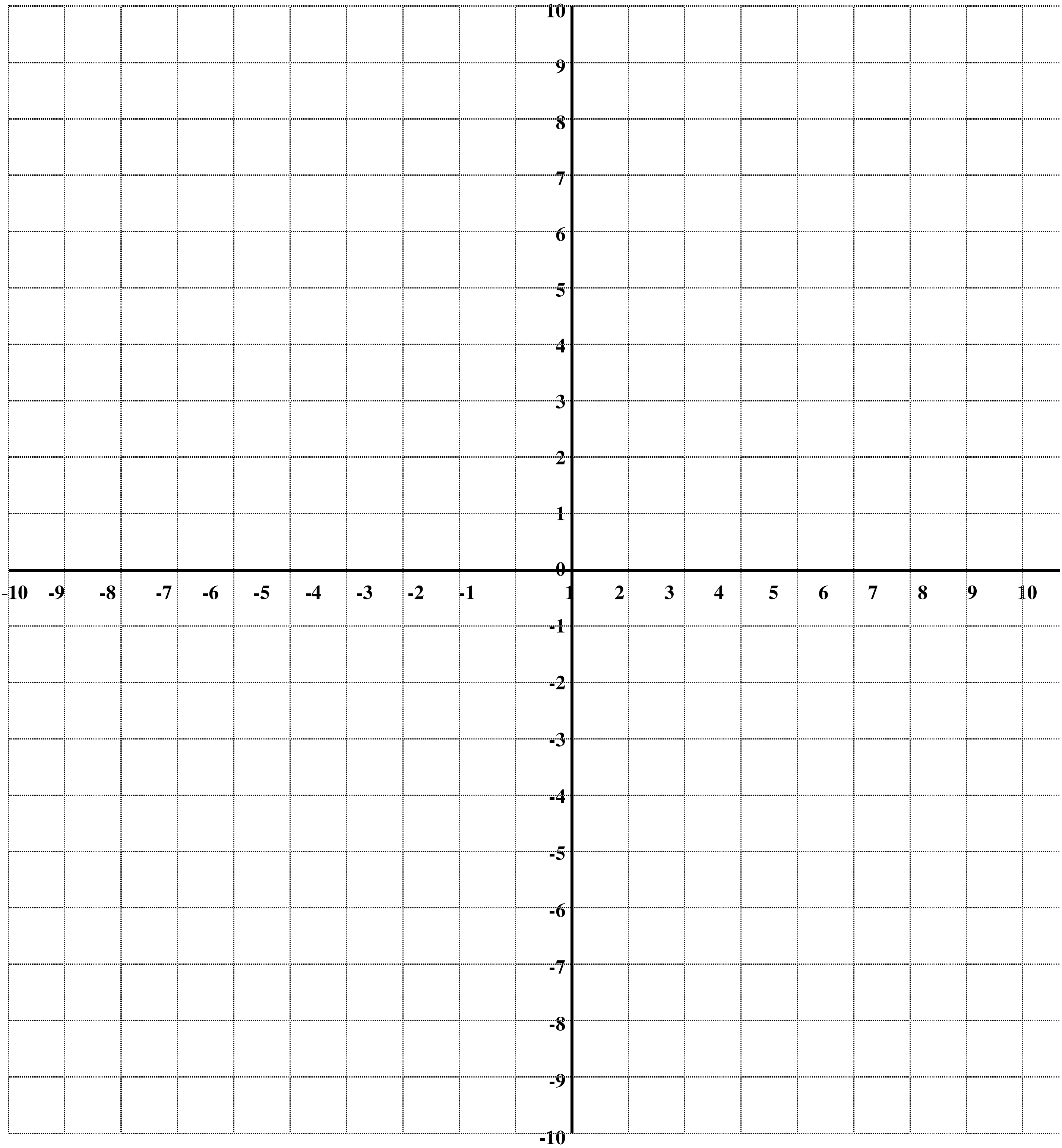
3.) Zeichne folgende Funktionen mit unterschiedlichen Farben in ein neues Koordinatensystem ein:

$f_1(x) = x^{-1} - 3$ $\qquad$ $f_2(x) = -2 \cdot x^{-2}$ $\qquad$ $f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1} + 3$ $\qquad$ $f_4(x) = x^{-2} + 1$

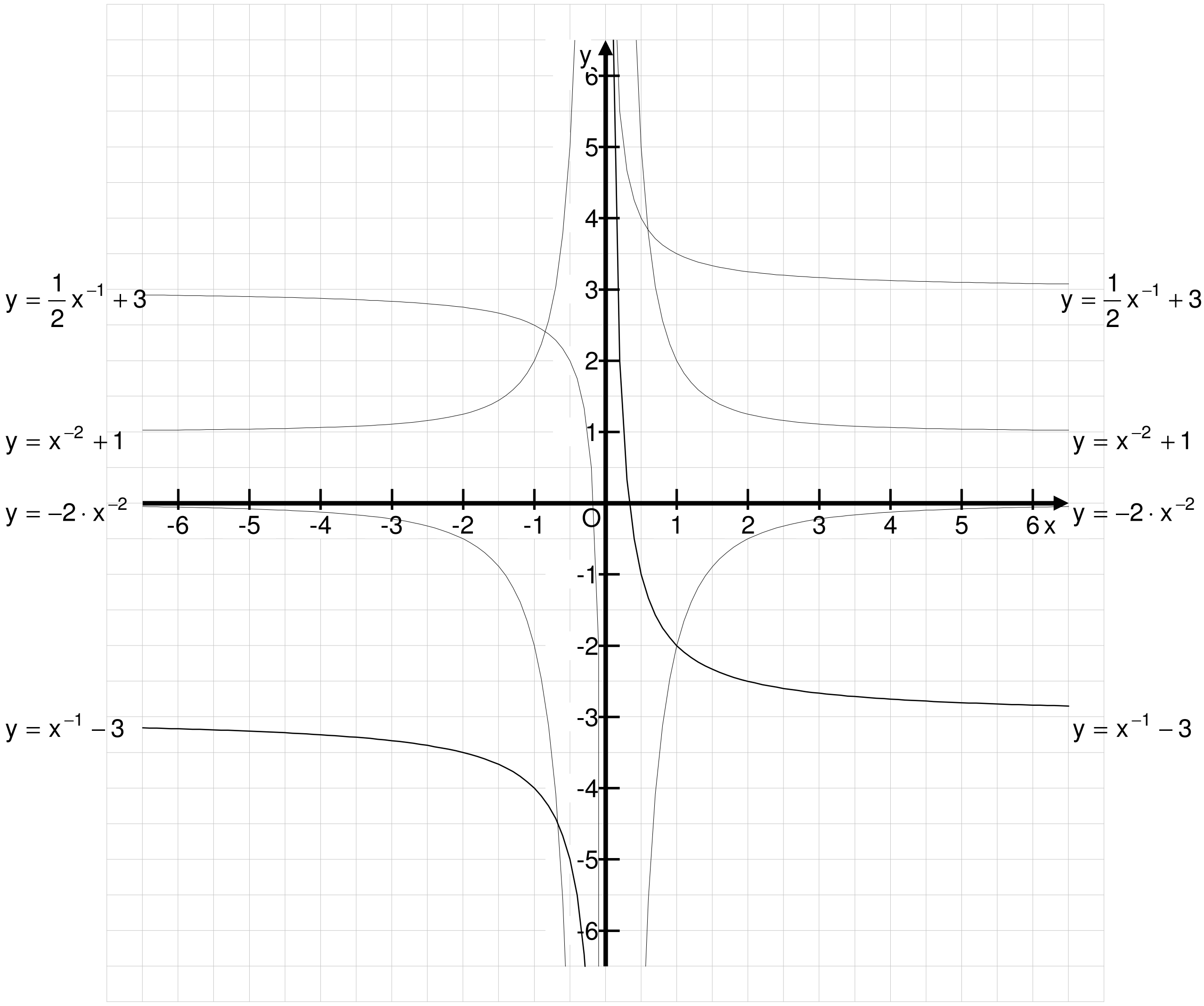
Überlege dazu zuerst, welche Auswirkungen die hinzugefügten Werte auf den Verlauf der Funktion besitzen. Finde danach mit Hilfe einer Wertetabelle und/oder mit Hilfe des Taschenrechners Punkte der Funktionen heraus und zeichne die 4 Funktionen mit verschiedenen Farben ein.

4.) Notiere: Was bewirkt der Faktor vor der Variablen x?
Was bewirkt der absolute Wert nach der Variablen?

Deine Notizen:


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

Lösungen zu dem Arbeitsblatt:



zu 4.) Der Faktor a vor der Variablen x hat folgende Wirkung:

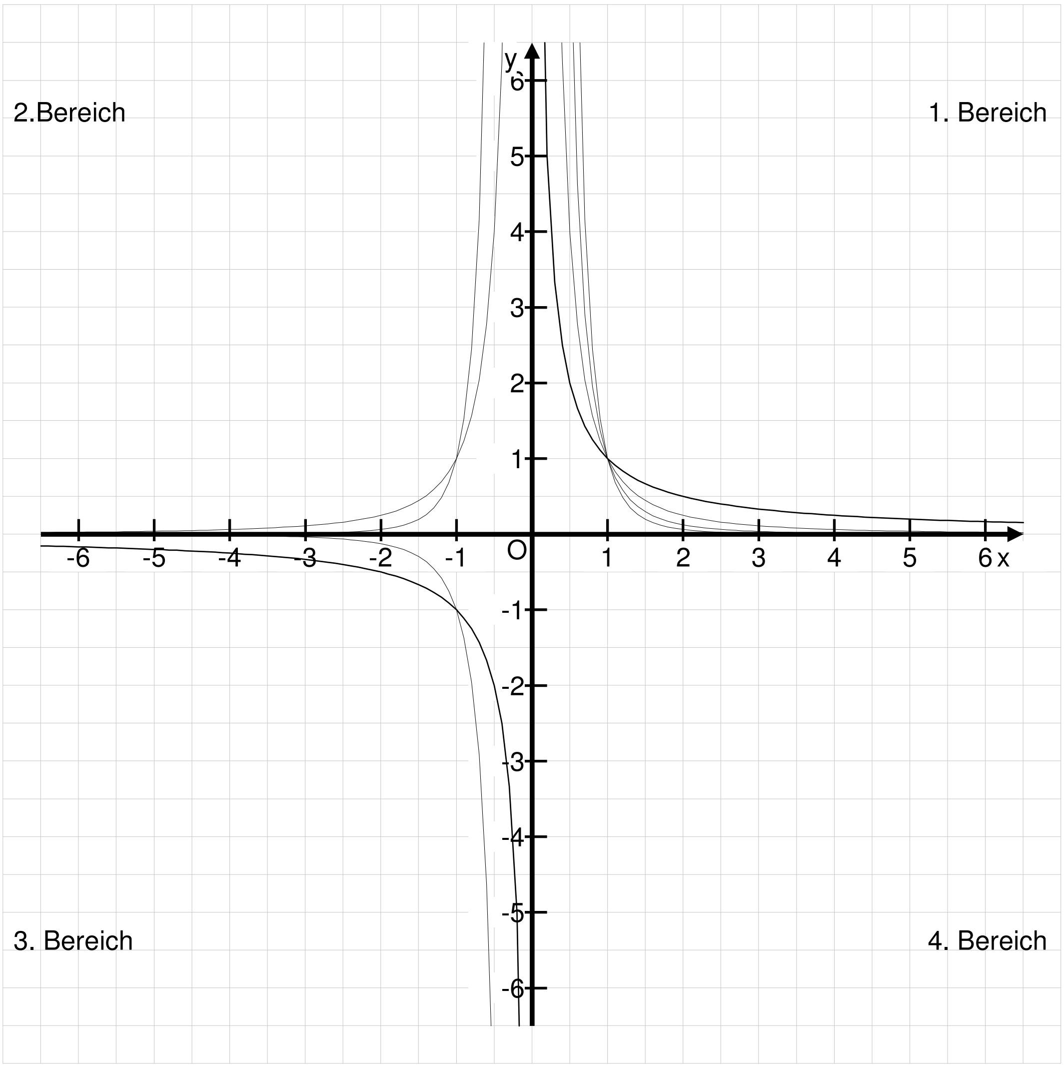
Ist der Faktor a vor der Variablen x negativ, so wird die ganze Funktion „umgedreht“.
Ist der Faktor a vor der Variablen x $-1<a<1$ so entfernt sich der Graph der Funktion etwas von seinen Asymptoten, bei den anderen Werten für a rückt er näher an sie heran.

Der absolute Wert b nach der Variablen hat folgende Wirkung:

Die ganze Funktion wird nach unten ($b<0$) oder nach oben ($b>0$) verschoben. Außerdem gibt dieser Wert b die Lage der Linie an, an die sich die Funktion annähert ohne sie aber jemals zu berühren (Asymptote, im KS oben gestrichelt angegeben).

Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Klebe diesen Arbeitszettel in dein Merkheft ein!



Eigenschaften der Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten:

Man unterscheidet:

a.) Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen **geraden** Exponenten und
b.) Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen **ungeraden** Exponenten

zu a.) Diese Funktionen sind symmetrisch zur y-Achse und haben die gemeinsamen Punkte P(1/1) und Q(-1/1). Sie verlaufen daher im 1. und 2. Bereich des Koordinatensystems.

zu b.) Diese Funktionen sind punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (0/0) und haben die gemeinsamen Punkte P(1/1) und R(-1/-1). Sie verlaufen daher im 1. und 3. Bereich des Koordinatensystems.

Allen Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten gemeinsam ist:

(1) Die Funktion ist für $x = 0$ nicht definiert.
(2) Die Funktion nähert sich den Koordinatenachsen immer mehr an, ohne sie aber jemals zu berühren.
Man sagt: Die Koordinatenachsen bilden die Asymptoten der Funktion.

(3) Die Funktion $y = x^{-1}$ nennt man auch Hyperbel.

Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten

Für alle Aufgaben gilt: Versuche im Endergebnis einen negativen Exponenten zu vermeiden!

1.) Wandle in die Exponentenschreibweise um:

a.) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001 67 (Masse des Wasserstoffatoms in kg) (AP 2004)
b.) 946 050 000 000 000 (Lichtjahr in m) (AP 2004)

2.) Berechne:

a.) $2^5 \cdot 2^{-3} =$ b.) $6^{-2} \cdot 5^{-2} =$ c.) $3^{-1} \cdot 3^{-2} =$

d.) $\frac{20^{-3}}{5^{-3}} =$ e.) $\frac{8^{-2}}{4^{-3}} =$ f.) $\frac{6^{-3}}{6^{-5}} =$

g.) $\left(2^3\right)^{-4} =$ h.) $\left((-3)^{-2}\right)^4 =$ i.) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^2 =$

3.) Vereinfache:

a.) $z^{-4} \cdot z^6 =$ b.) $x^5 : x^{-5} =$ c.) $\left(a^{-2}\right)^3 =$

d.) $(vw)^{-4} =$ e.) $x^{-3} \cdot y^{-3} =$ f.) $(-2a)^{-2} \cdot (4a)^2 =$

g.) $\frac{(a \cdot b \cdot c)^{-1}}{(a \cdot b)^{-2}} =$ h.) $\frac{x^2 \cdot y^{-3}}{y^2 \cdot x^{-3}} =$ i.) $a^3 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b^{-2} \cdot a^{-4} =$

4.) Vereinfache:

a.) $\frac{a^{-4}b^5}{x^{-3}y^{-2}} \cdot \frac{x^{-2}y^{-1}}{a^{-3}b^6} =$ b.) $\frac{3x^{-2}y}{2a^2b} : \frac{x^4y^{-3}}{6ab^2} =$

c.) $\frac{(ab)^{-2}}{x^2y^{-1}} \cdot \frac{(xy)^2}{a^3b} =$ d.) $\frac{\left(xy^2z\right)^{-2}}{a^2b^{-1}} : \frac{\left(x^2y\right)^2}{(ab)^{-1}} =$ e.) $\frac{26y^{-3}z^{-3}}{39y^2z^{-13}} =$ (AP 2004)

5.) Weltweit wurden 1992 etwa $5{,}6 \cdot 10^{11}$ Hühnereier produziert. Wie viel Kilometer hoch ist der Stapel, wenn man sie sich in die üblichen 10er-Packungen (Höhe 6 cm) abgepackt und diese aufeinander geschichtet denkt?

6.) Eine Uhr weicht täglich höchstens 10^{-11} Sekunden von der richtigen Zeit ab. Der Hersteller will mit dem Slogan werben: „Weicht in x Jahren um höchstens 1 Sekunde von der tatsächlichen Zeit ab".

Welche Zahl kann für x eingesetzt werden?

7.) Ein kugelförmiger Wassertropfen von 1 mm Durchmesser besteht aus ca. $1{,}74 \cdot 10^{19}$ Molekülen. Wie viel Jahre würde es dauern, diese Moleküle zu zählen, wenn man 5 Moleküle pro Sekunde zählen könnte?

Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten

1.) Exponentenschreibweise:

a.) $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ b.) $9{,}4605 \cdot 10^{14}$

2.) Berechne:

a.) 2^2

b.) $(30)^{-2} = \left(\frac{1}{30}\right)^2 = \frac{1}{900}$

c.) $3^{-3} = \frac{1}{27}$

d.) $\left(\frac{5}{20}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

e.) $\frac{4^3}{8^2} = \frac{64}{64} = 1$

f.) $6^{-3-(-5)} = 6^2 = 36$

g.) $2^{-12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$

h.) $(-3)^{-8} = \left(-\frac{1}{3}\right)^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^8$

i.) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$

3.) Vereinfache:

a.) z^2

b.) $x^{5-(-5)} = x^{10}$

c.) $a^{-6} = \left(\frac{1}{a}\right)^6$

d.) $\left(\frac{1}{vw}\right)^4 = \frac{1}{v^4w^4}$

e.) $(xy)^{-3} = \left(\frac{1}{xy}\right)^3$

f.) $\frac{1}{4a^2} \cdot 16a^2 = 4$

g.) $\frac{a^2 \cdot b^2}{a \cdot b \cdot c} = \frac{ab}{c}$

h.) $\frac{x^5}{y^5} = \left(\frac{x}{y}\right)^5$

i.) ab

4.) Vereinfache:

a.) $\frac{a^3 \cdot b^5 \cdot x^3 \cdot y^2}{a^4 \cdot x^2 \cdot y \cdot b^6} = \frac{xy}{ab}$

b.) $\frac{3x^{-2}y}{2a^2b} \cdot \frac{6ab^2}{x^4y^{-3}} = \frac{3y \cdot y^3 \cdot 6ab^2}{2a^2bx^2} = \frac{9by^4}{ax^2}$

c.) $\frac{y}{x^2a^2b^2} \cdot \frac{x^2y^2}{a^3b} = \frac{y^3}{a^5b^3}$

d.) $\frac{x^{-2}y^{-4}z^{-2}}{a^2b^{-1}} \cdot \frac{a^{-1}b^{-1}}{x^4y^2} = \frac{1}{a^3x^6y^6z^2}$

e.) $\frac{26z^{13}}{39y^2 \cdot y^3 \cdot z^3} = \frac{2z^{10}}{3y^5}$

5.) $h = \frac{5{,}6 \cdot 10^{11}}{10} \cdot 6 = 5{,}6 \cdot 6 \cdot 10^{10}\ \text{cm} = 33{,}6 \cdot 10^5\ \text{km} = 3.360.000\ \text{km}$

6.) täglich : 10^{-11} s jährlich : $360 \cdot 10^{-11}\ \text{s} = \frac{360}{10^{11}}\ \text{s}$ $t = \frac{1}{\left(\frac{360}{10^{11}}\right)} = \frac{10^{11}}{360} = 277.777.777{,}8$ Jahre

7.) $t = \frac{1{,}74 \cdot 10^{19}}{5} = 0{,}348 \cdot 10^{19}\ \text{s} = \frac{0{,}348 \cdot 10^{19}}{3600 \cdot 24 \cdot 360}\ \text{j} = 111.882.716.000$ Jahre

Die n-te Wurzel

<u>Aufgabe:</u>

Ein Würfel besitzt ein Volumen von 125 cm³. Welche Kantenlänge a besitzt dieser Würfel?

$$
\begin{aligned}
a \cdot a \cdot a &= 125 \\
a^3 &= 125 \;/\; \sqrt[3]{} \\
\sqrt[3]{a^3} &= \sqrt[3]{125} \\
a &= 5
\end{aligned}
$$

MERKE:

Unter der 3. Wurzel einer Zahl a versteht man diejenige nicht negative Zahl, die mit 3 potenziert die Zahl a ergibt. Dabei darf a nicht negativ sein!

Wurzelexponent

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{denn} \quad 4^3 = 64$$

Radikand

Wurzelwert

<u>Beachte:</u> Die dritte Wurzel aus einer negativen Zahl, z.B. $\sqrt[3]{-8}$ ist nicht definiert.

Außerdem gilt: $\sqrt[3]{(4^3)} = 4$ und $\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 4$

<u>Beispiel:</u>

$\sqrt[3]{8^2} =$

Möglichkeit 1: $\sqrt[3]{(8^2)} = \sqrt[3]{64} = 4$

Möglichkeit 2: $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

<u>Aufgabe:</u>

Welche positive reelle Zahl x ist Lösung der Gleichung:

$x^4 = 81 / \sqrt[4]{}$	$x^5 = 32 / \sqrt[5]{}$	$x^{10} = 1024 / \sqrt[10]{}$
$\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{81}$	$\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{32}$	$\sqrt[10]{x^{10}} = \sqrt[10]{1024}$
$x = 3$	$x = 2$	$x = 2$

MERKE:

Unter der n-ten Wurzel einer Zahl a versteht man diejenige nichtnegative Zahl, die mit n potenziert die Zahl a ergibt. Dabei darf a nicht negativ sein!

<u>Beispiel:</u>

$$\sqrt[5]{243} = 3 \quad \text{denn} \quad 3^5 = 243$$

$$\sqrt[n]{(a^n)} = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Potenzen mit rationalen Exponenten

1.) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$ oder :

$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = (x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{2\cdot\frac{1}{2}} = x^1 = x$

2.) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$ oder :

$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = (5 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\cdot\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$

Gleiche Faktoren miteinander multipliziert ergeben das Produkt 5

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ denn nur $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

Nur die gleichen Faktoren $\sqrt{5}$ miteinander multipliziert ergeben das Produkt 5

Es muss also gelten: $$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

3.) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 4^1 = 4$ oder :

$4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = (4 \cdot 4 \cdot 4)^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4^{3\cdot\frac{1}{3}} = 4^1 = 4$

Es muss also gelten: $$4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

oder allgemein: $$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

<u>Weiterführende Beispiele:</u>

1.) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = \left(a^3\right)^{\frac{2}{3}} = a^{3\cdot\frac{2}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3 = a^2$

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(a^2)} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$$

2.) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(16^3)} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3$

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{4096} = 8$

oder : $16^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(16^3)} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3$$

<u>allgemein:</u>

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Der Nenner des Exponenten (n) wird zum Wurzelexponenten, der Zähler des Exponenten (m) kommt als Exponent zum Radikanden oder als Exponent hinter die Wurzel.

Der Exponent ist ein negativer Bruch:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^m$$

Beispiele:

1.) $16^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{16}\right)} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

2.) $27^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{27}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0{,}\bar{1}$

3.) $\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

4.) $0{,}008^{-0,\bar{6}} = \left(\frac{8}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1000}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1000}{8}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1000}{8}}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25$

oder : $0{,}008^{-0,\bar{6}} = \left(\frac{8}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(125)^2} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$

allgemein:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a}\right)^m} = \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^m$$

MERKE:

1.) Minus-Zeichen im Exponent bedeutet:

Kehrwert der Basis bilden und gleichzeitig den Exponenten positiv machen.

2.) Bruch- oder Dezimalzahl im Exponenten bedeutet:

Umformen in einen Wurzelterm. Dabei rückt der Nenner des Bruches auf die Wurzel (Wurzelexponent), der Zähler kommt als Exponent zur Zahl unter der Wurzel (Radikand) oder hinter die Wurzel.

Berechne:

a.) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

b.) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

c.) $81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

d.) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

e.) $0{,}01^{-0,5} = \frac{1}{0{,}01^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}01}} = \frac{1}{0{,}1} = 10$

f.) $64^{-0,\bar{6}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{0,\bar{6}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{64}\right)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

g.) $32^{0,2} = 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$

h.) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-0,\bar{3}} = 27^{0,\bar{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Potenzgesetze für rationale Exponenten

1.) $64^{\frac{2}{3}} \cdot 64^{\frac{4}{3}} = 64^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} = 64^{\frac{6}{3}} = 64^2 = \left(4^3\right)^2 = 4^6$

$64^{\frac{2}{3}} \cdot 64^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{64}\right)^4 = 4^2 \cdot 4^4 = 4^6$

Potenzgesetz 1

2.) $64^{\frac{2}{3}} : 64^{\frac{4}{3}} = 64^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}} = 64^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$64^{\frac{2}{3}} : 64^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 : \left(\sqrt[3]{64}\right)^4 = \frac{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^4} = \frac{4^2}{4^4} = \frac{16}{256} = \frac{1}{16}$

Potenzgesetz 2

3.) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{2}{3}} = (8 \cdot 27)^{\frac{2}{3}} = 216^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{216}\right)^2 = 6^2$

$8^{\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$

Potenzgesetz 3

4.) $8^{\frac{2}{3}} : 27^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$8^{\frac{2}{3}} : 27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 : \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 2^2 : 3^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Potenzgesetz 4

5.) $\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

$\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2} = \sqrt[2]{4^2} = 4$

$\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2} = \left(\sqrt[6]{64}\right)^2 = 2^2 = 4$

Potenzgesetz 5

MERKE:

Die Potenzgesetze gelten auch für Rationale Exponenten und damit auch für das Rechnen mit Wurzeln.

Beispiele:

1.) $\sqrt[3]{4^{12}} = 4^{\frac{12}{3}} = 4^4 = 256$

2.) $\sqrt[9]{27^3} = 27^{\frac{3}{9}} = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

3.) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{2}} = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^7$

4.) $\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^7} = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{7}{3}} = a^{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$

$\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^5 \cdot a^7} = \sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$

Vereinfachen von Potenztermen

1.) Vereinfache so weit wie möglich die folgenden Potenzterme und bestimme ihre Lösung **ohne TR**.

a.) $(-2)^{-4} =$

b.) $5^{-3} =$

c.) $0{,}2^{2} =$

d.) $-1^{6} =$

e.) $0{,}3^{-3} =$

f.) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

g.) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} =$

h.) $1{,}5^{-2} =$

i.) $\left(-2\frac{3}{4}\right)^{2} =$

j.) $5{,}37 \times 10^{-4} =$

k.) $0{,}75 \times 10^{5} =$

l.) $2{,}9743 \times 10^{-6} =$

m.) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{5}{6}} =$

n.) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} =$

o.) $25^{-\frac{3}{2}} =$

p.) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} =$

q.) $10.000^{0,75} =$

r.) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-0,25} =$

s.) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

t.) $0{,}81^{-\frac{1}{2}} =$

u.) $1000^{-0,\bar{3}} =$

v.) $\left(\frac{1}{128}\right)^{-\frac{3}{7}} =$

w.) $\left(\frac{1}{1000000}\right)^{-\frac{5}{6}} =$

2.) Vereinfache die folgenden Aufgaben so weit wie möglich. Achte darauf, dass das Ergebnis keine **negative Hochzahl mehr besitzt**.

a.) $(2a^2 + 3a^3) \cdot 3a^4 =$

b.) $x^{4a-1} \cdot x^{1+a} \cdot x^{3a} =$

c.) $(-3a^2b^3) \cdot (-4a^3b) =$

d.) $(-a)^{2x-1} \cdot (-a)^{1-2x} \cdot (-a) =$

e.) $(2x^4 - 3y^3 + 4z^5) \cdot (x - y^2) =$

f.) $(a^{2x+1})^3 =$

g.) $\frac{10^{n-1}}{10^{n+1}} =$

h.) $\frac{a^{-2x}b^{-5y}}{a^{-3x}b^{-2y}} =$

i.) $\frac{a^{2n}}{a^{3n}} =$

j.) $\frac{28m^5n^{-7}p^{-4}}{42m^{-6}n^{-8}p^{-2}} =$

k.) $\frac{x^{2a+3}}{x^{2a-6}} =$

l.) $\frac{a^{n-1}b^{n+2}}{x^{n-2}y^{n+3}} \cdot \frac{x^2y^3}{ab^{n+3}} =$

m.) $\frac{x^{4a-1} \cdot y^{6a-5}}{y^{2a-1} \cdot x^{3a-1}} =$

n.) $\left(\frac{a^3b^{-4}}{5c^{-6}}\right)^{-2} =$

o.) $\frac{a^3b^4}{b^8} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a}{b} =$

p.) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} =$

q.) $(-7)^3 \cdot \left(-\frac{5}{21}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{25}\right)^3 =$

r.) $\frac{(2xy)^{2n}}{(-4x)^{2n}} =$

s.) $(a^{2x+1})^3 =$

t.) $\left(\frac{x^2y^2}{a^2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{ab}{xy^2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{a^2}{xy}\right)^{n} =$

u.) $\left(\frac{a^2bc^2}{de^2f}\right)^5 : \left(\frac{ab^2c}{d^2ef}\right)^5 =$

3.) Vereinfache die folgenden Aufgaben so weit wie möglich. Achte darauf, dass das Ergebnis keine **Brüche als Hochzahlen mehr besitzt**.

a.) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{1\frac{1}{2}} =$

b.) $4^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{5}} =$

c.) $3^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

d.) $(2x)^{\frac{2}{3}} : (3x)^{\frac{2}{3}} =$

e.) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} =$

f.) $\left(x^{\frac{4}{5}} \cdot y^{-\frac{8}{5}}\right)^{-\frac{5}{8}} =$

4.) Vereinfache die folgenden Aufgaben so weit wie möglich:

a.) $\sqrt[3]{2a^2} \cdot 7\sqrt[3]{2a^3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{16a^4} =$

b.) $\frac{\sqrt[4]{12r^3}}{\sqrt[4]{6s^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{21rs}}{\sqrt[4]{3r}} =$

c.) $\frac{\sqrt[3]{2x^2y^7}}{\sqrt[3]{x^5y^5}} : \frac{\sqrt[3]{12x^3y^4}}{\sqrt[3]{42x^2y^3}} =$

d.) $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^8c^{16}}{625x^8y^4z^{12}}} =$

e.) $\sqrt[4]{81x^4y^8} =$

f.) $\sqrt{\sqrt[3]{x^6}} =$

g.) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{81a^{12}}} =$

h.) $\sqrt{81a^2b^2} + \sqrt[3]{125b^3c^3} + \sqrt[5]{32a^5b^5} + \sqrt[4]{81b^4c^4} =$

5.) Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

a.) $x^3 = 64$

b.) $x^8 = 256$

c.) $x^5 = 2^3$

d.) $3x^3 - 375 = 0$

e.) $\sqrt[3]{x} = -8$

f.) $(x-3)^3 = 8$

g.) $3(x+5)^4 = 48$

h.) $\sqrt[7]{x-5} = 2$

i.) $\sqrt[5]{3x} = 3$

j.) $4\sqrt[3]{4-x} = 12$

k.) $\sqrt[4]{10 + 3\sqrt[3]{2y+2}} = 2$

l.) $2\sqrt[3]{2x+5} = 3\sqrt[3]{x+6}$

m.) $\sqrt{16 + \sqrt[3]{111x + 174}} = \sqrt{16 + 3\sqrt[3]{3x+12}}$

6.) Die Erde hat eine Masse von etwa $5{,}973 \cdot 10^{21}$ t und ein Volumen von etwa $1{,}083 \cdot 10^{12}\ \text{km}^3$. Wie groß ist die mittlere Dichte der Erde in g/cm³?

7.) In der folgenden Tabelle sind die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne angegeben. Berechne jeweils, wie viel Minuten (und Stunden) ein Lichtstrahl von der Sonne zu den Planeten benötigt. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 299 792 000 m/s.

Planet	Mittlere Entfernung
Merkur	$57{,}9 \cdot 10^6$ km
Venus	$108{,}2 \cdot 10^6$ km
Erde	$149{,}5 \cdot 10^6$ km
Mars	$227{,}9 \cdot 10^6$ km
Jupiter	$778{,}3 \cdot 10^6$ km
Saturn	$1{,}428 \cdot 10^9$ km
Uranus	$2{,}842 \cdot 10^9$ km
Neptun	$4{,}498 \cdot 10^9$ km
Pluto	$5{,}910 \cdot 10^9$ km

Vereinfachen von Potenztermen (Lösungen)

1.) Vereinfache so weit wie möglich die folgenden Potenzterme und bestimme ihre Lösung **ohne TR**.

a.) $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

b.) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

c.) $0{,}2^2 = 0{,}04$

d.) $-1^6 = 1$

e.) $0{,}3^{-3} = \left(\frac{3}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27} = 31\frac{1}{27}$

f.) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

g.) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$

h.) $1{,}5^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0{,}\overline{4}$

i.) $\left(-2\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{121}{16} = 7\frac{9}{16}$

j.) $5{,}37 \text{ x } 10^{-4} = 0{,}000537$

k.) $0{,}75 \text{ x } 10^5 = 75.000$

l.) $2{,}9743 \text{ x } 10^{-6} = 0{,}0000029743$

m.) $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{64}\right)^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

n.) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{125}{8}\right)^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

o.) $25^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{25}\right)^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

p.) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

q.) $10.000^{0{,}75} = 10.000^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10.000}^3 = 10^3 = 1000$

r.) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-0{,}25} = \left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} = 625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5$

s.) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

t.) $0{,}81^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{81}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{100}{81}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{100}{81}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$

u.) $1000^{-0{,}\overline{3}} = 1000^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10}$

v.) $\left(\frac{1}{128}\right)^{-\frac{3}{7}} = 128^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{128}^3 = 2^3 = 8$

w.) $\left(\frac{1}{1000000}\right)^{-\frac{5}{6}} = 1.000.000^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{1.000.000}^5 = 10^5 = 100.000$

2.) Vereinfache die folgenden Aufgaben so weit wie möglich. Achte darauf, dass das Ergebnis keine **negative Hochzahl mehr besitzt.**

a.) $(2a^2 + 3a^3) \cdot 3a^4 = 6a^6 + 9a^7$

b.) $x^{4a-1} \cdot x^{1+a} \cdot x^{3a} = x^{4a-1+1+a+3a} = x^{8a}$

c.) $(-3a^2b^3) \cdot (-4a^3b) = 12a^5b^4$

d.) $(-a)^{2x-1} \cdot (-a)^{1-2x} \cdot (-a) = (-a)^{2x-1+1-2x+1} = (-a)^1 = -a$

e.) $(2x^4 - 3y^3 + 4z^5) \cdot (x - y^2) = 2x^5 - 2x^4y^2 - 3xy^3 + 3y^5 + 4xz^5 - 4y^2z^5$

f.) $(a^{2x+1})^3 = a^{(2x+1)\cdot 3} = a^{6x+3}$

g.) $\frac{10^{n-1}}{10^{n+1}} = 10^{(n-1)-(n+1)} = 10^{n-1-n-1} = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

h.) $\frac{a^{-2x}b^{-5y}}{a^{-3x}b^{-2y}} = a^{-2x-(-3x)}b^{-5y-(-2y)} = a^{-2x+3x}b^{-5y+2y} = \frac{a^x}{b^{3y}}$

i.) $\frac{a^{2n}}{a^{3n}} = a^{2n-3n} = a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

j.) $\dfrac{28m^5n^{-7}p^{-4}}{42m^{-6}n^{-8}p^{-2}} = \dfrac{2m^5m^6n^8p^2}{3n^7p^4} = \dfrac{2m^{11}n}{3p^2}$

k.) $\dfrac{x^{2a+3}}{x^{2a-6}} = x^{(2a+3)-(2a-6)} = x^{2a+3-2a+6} = x^9$

l.) $\dfrac{a^{n-1}b^{n+2}}{x^{n-2}y^{n+3}} \cdot \dfrac{x^2y^3}{ab^{n+3}} = a^{(n-1)-1}b^{(n+2)-(n+3)}x^{2-(n-2)}y^{3-(n+3)} = a^{n-2}b^{n+2-n-3}x^{2-n+2}y^{3-n-3} = a^{n-2}b^{-1}x^{4-n}y^{-n} = \dfrac{a^{n-2}x^{4-n}}{by^n}$

m.) $\dfrac{x^{4a-1} \cdot y^{6a-5}}{y^{2a-1} \cdot x^{3a-1}} = x^{(4a-1)-(3a-1)}y^{(6a-5)-(2a-1)} = x^{4a-1-3a+1}y^{6a-5-2a+1} = x^a y^{4a-4}$

n.) $\left(\dfrac{a^3b^{-4}}{5c^{-6}}\right)^{-2} = \dfrac{a^{-6}b^8}{5^{-2}c^{12}} = \dfrac{25b^8}{a^6c^{12}}$

o.) $\dfrac{a^3b^4}{b^8} \cdot \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{a^3b^4 \cdot b^2 \cdot a}{b^8 \cdot a^2 \cdot b} = \dfrac{a^4b^6}{b^9a^2} = \dfrac{a^2}{b^3}$

p.) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

q.) $(-7)^3 \cdot \left(-\dfrac{5}{21}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{3}{25}\right)^3 = \left((-7) \cdot \left(-\dfrac{5}{21}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{25}\right)\right)^3 = \left(\dfrac{7 \cdot 5 \cdot 3}{21 \cdot 25}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^3 = \dfrac{1}{125}$

r.) $\dfrac{(2xy)^{2n}}{(-4x)^{2n}} = \left(\dfrac{2xy}{-4x}\right)^{2n} = \left(-\dfrac{y}{2}\right)^{2n}$

s.) $(a^{2x+1})^3 = a^{(2x+1)\cdot 3} = a^{6x+3}$

t.) $\left(\dfrac{x^2y^2}{a^2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{ab}{xy^2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{a^2}{xy}\right)^n = \left(\dfrac{x^2y^2 \cdot ab \cdot a^2}{a^2 \cdot xy^2 \cdot xy}\right)^n = \left(\dfrac{x^2y^2 \cdot a^3b}{a^2 \cdot x^2y^3}\right)^n = \left(\dfrac{ab}{y}\right)^n$

u.) $\left(\dfrac{a^2bc^2}{de^2f}\right)^5 : \left(\dfrac{ab^2c}{d^2ef}\right)^5 = \left(\dfrac{a^2bc^2}{de^2f} : \dfrac{ab^2c}{d^2ef}\right)^5 = \left(\dfrac{a^2bc^2}{de^2f} \cdot \dfrac{d^2ef}{ab^2c}\right)^5 = \left(\dfrac{acd}{be}\right)^5$

3.) Vereinfache die folgenden Aufgaben so weit wie möglich. Achte darauf, dass das Ergebnis keine **Brüche als Hochzahlen mehr besitzt**.

a.) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{1\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}} = x^3$

b.) $4^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{5}} = (4 \cdot 2)^{\frac{2}{5}} = 8^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{8^2} = \sqrt[5]{64}$

c.) $3^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(3 \cdot \dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

d.) $(2x)^{\frac{2}{3}} : (3x)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{2x}{3x}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}$

e.) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$

f.) $\left(x^{\frac{4}{5}} \cdot y^{-\frac{8}{5}}\right)^{-\frac{5}{8}} = x^{\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)}y^{\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)} = x^{-\frac{1}{2}}y = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$

4.) Vereinfache die folgenden Aufgaben so weit wie möglich:

a.) $\sqrt[3]{2a^2}\cdot 7\sqrt[3]{2a^3}\cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{16a^4} = 7\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{2a^2\cdot 2a^3\cdot 16a^4} = 3\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{64a^9} = \frac{7}{2}\cdot 4a^3 = 14a^3$

b.) $\frac{\sqrt[4]{12r^3}}{\sqrt[4]{6s^2}}\cdot\frac{\sqrt[4]{21rs}}{\sqrt[4]{3r}} = \sqrt[4]{\frac{12r^3\cdot 21rs}{6s^2\cdot 3r}} = \sqrt[4]{\frac{2r^3\cdot 7rs}{s^2\cdot r}} = \sqrt[4]{\frac{14r^3}{s}}$

c.) $\frac{\sqrt[3]{2x^2y^7}}{\sqrt[3]{x^5y^5}} : \frac{\sqrt[3]{12x^3y^4}}{\sqrt[3]{42x^2y^3}} = \sqrt[3]{\frac{2x^2y^7}{x^5y^5} : \frac{12x^3y^4}{42x^2y^3}} = \sqrt[3]{\frac{2x^2y^7}{x^5y^5}\cdot\frac{42x^2y^3}{12x^3y^4}} = \sqrt[3]{\frac{7y}{x^4}} = \frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{7y}{x}}$

d.) $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^8c^{16}}{625x^8y^4z^{12}}} = \frac{2ab^2c^4}{5x^2yz^3}$

e.) $\sqrt[4]{81x^4y^8} = 3xy^2$

f.) $\sqrt{\sqrt[3]{x^6}} = \sqrt[6]{x^6} = x$

g.) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{81a^{12}}} = \sqrt[12]{81a^{12}} = a\cdot\sqrt[12]{81}$

h.) $\sqrt{81a^2b^2} + \sqrt[3]{125b^3c^3} + \sqrt[5]{32a^5b^5} + \sqrt[4]{81b^4c^4} = 9ab + 5bc + 2ab + 3bc = 11ab + 8bc$

5.) Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

a.) $x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$

b.) $x^8 = 256 \Leftrightarrow x = 2$

c.) $x^5 = 2^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{8}$

d.) $3x^3 - 375 = 0$

$3x^3 = 375$

$x^3 = 125$

$x = 5$

e.) $\sqrt[3]{x} = -8$

$x = -512$

f.) $(x-3)^3 = 8$

$x - 3 = 2$

$x = 5$

g.) $3(x+5)^4 = 48$

$(x+5)^4 = 16$

$x + 5 = 2$

$x = -3$

h.) $\sqrt[7]{x-5} = 2$

$x - 5 = 128$

$x = 133$

i.) $\sqrt[5]{3x} = 3$

$3x = 243$

$x = 81$

j.) $4\sqrt[3]{4-x} = 12$

$\sqrt[3]{4-x} = 3$

$4 - x = 27$

$x = -23$

k.) $\sqrt[4]{10 + 3\sqrt[3]{2y+2}} = 2$

$10 + 3\sqrt[3]{2y+2} = 16$

$3\sqrt[3]{2y+2} = 6$

$\sqrt[3]{2y+2} = 2$

$2y + 2 = 8$

$2y = 6$

$y = 3$

l.) $2\sqrt[3]{2x+5} = 3\sqrt[3]{x+6}$

$8\cdot(2x+5) = 27\cdot(x+6)$

$16x + 40 = 27x + 162$

$-11x = 122$

$x = -\frac{122}{11}$

$x = -11\frac{1}{11}$

m.) $\sqrt{16 + \sqrt[3]{111x + 174}} = \sqrt{16 + 3\sqrt[3]{3x+12}}$

$16 + \sqrt[3]{111x + 174} = 16 + 3\sqrt[3]{3x+12}$

$\sqrt[3]{111x + 174} = 3\sqrt[3]{3x+12}$

$111x + 174 = 27\cdot(3x+12)$

$111x + 174 = 81x + 324$

$30x = 150$

$x = 5$

6.) Die Erde hat eine Masse von etwa $5{,}973 \cdot 10^{21}$ t und ein Volumen von etwa $1{,}083 \cdot 10^{12}\ \text{km}^3$. Wie groß ist die mittlere Dichte der Erde in g/cm³?

$$\frac{5{,}973 \cdot 10^{21} \cdot 10^{6}\ \text{g}}{1{,}083 \cdot 10^{12} \cdot 10^{15}\ \text{cm}^3} = \frac{5{,}973 \cdot 10^{27}\ \text{g}}{1{,}083 \cdot 10^{27}\ \text{cm}^3} = \frac{5{,}973}{1{,}083}\ \text{g/cm}^3 = 5{,}515\ \text{g/cm}^3$$

7.) In der folgenden Tabelle sind die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne angegeben. Berechne jeweils, wie viel Minuten (und Stunden) ein Lichtstrahl von der Sonne zu den Planeten benötigt. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 299 792 000 m/s.

Planet	Mittlere Entfernung
Merkur	$57{,}9 \cdot 10^6$ km
Venus	$108{,}2 \cdot 10^6$ km
Erde	$149{,}5 \cdot 10^6$ km
Mars	$227{,}9 \cdot 10^6$ km
Jupiter	$778{,}3 \cdot 10^6$ km
Saturn	$1{,}428 \cdot 10^9$ km
Uranus	$2{,}842 \cdot 10^9$ km
Neptun	$4{,}498 \cdot 10^9$ km
Pluto	$5{,}910 \cdot 10^9$ km

Merkur: $\frac{57{,}9 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{299.792 \cdot 10^3}\ \text{s} = \frac{57.900.000}{299.792}\ \text{s} \approx 193\ \text{s} \approx 3\ \text{min}\ 13\ \text{s}$

Venus: $\frac{108{,}2 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{299.792 \cdot 10^3}\ \text{s} = \frac{108.200.000}{299.792}\ \text{s} \approx 361\ \text{s} \approx 5\ \text{min}\ 1\ \text{s}$

Erde: $\frac{149{,}5 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{299.792 \cdot 10^3}\ \text{s} = \frac{149.500.000}{299.792}\ \text{s} \approx 499\ \text{s} \approx 8\ \text{min}\ 19\ \text{s}$

Mars: $\frac{227{,}9 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{299.792 \cdot 10^3}\ \text{s} = \frac{227.900.000}{299.792}\ \text{s} \approx 760\ \text{s} \approx 12\ \text{min}\ 40\ \text{s}$

Jupiter: $\frac{778{,}3 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{299.792 \cdot 10^3}\ \text{s} = \frac{778.300.000}{299.792}\ \text{s} \approx 2596\ \text{s} \approx 43\ \text{min}\ 16\ \text{s}$

Saturn: $\frac{1{,}428 \cdot 10^9 \cdot 10^3}{299.792 \cdot 10^3}\ \text{s} = \frac{1.428.000.000}{299.792}\ \text{s} \approx 4763\ \text{s} \approx 1\ \text{h}\ 19\ \text{min}\ 23\ \text{s}$

Uranus: $\frac{2{,}842 \cdot 10^9 \cdot 10^3}{299.792 \cdot 10^3}\ \text{s} = \frac{2.842.000.000}{299.792}\ \text{s} \approx 9480\ \text{s} \approx 2\ \text{h}\ 38\ \text{min}$

Neptun: $\frac{4{,}498 \cdot 10^9 \cdot 10^3}{299.792 \cdot 10^3}\ \text{s} = \frac{4.498.000.000}{299.792}\ \text{s} \approx 15004\ \text{s} \approx 4\ \text{h}\ 10\ \text{min}\ 4\ \text{s}$

Pluto: $\frac{5{,}91 \cdot 10^9 \cdot 10^3}{299.792 \cdot 10^3}\ \text{s} = \frac{5.910.000.000}{299.792}\ \text{s} \approx 19714\ \text{s} \approx 5\ \text{h}\ 28\ \text{min}\ 34\ \text{s}$
