Der Kreis und die Kreisteile

Schüler messen zu Hause Umfang und Durchmesser von runden Gegenständen:

Gegenstand	Umfang (U)	Durchmesser (d)	$\frac{u}{d}$
CD	38 cm	12 cm	$\frac{38}{12} = 3{,}1\overline{6}$
0,5l-Glas	24 cm	7 cm	$\frac{24}{7} = 3{,}\overline{4285714}$
Mülleimer	63 cm	20 cm	$\frac{63}{20} = 3{,}15$
Keksdose	79 cm	25 cm	$\frac{79}{25} = 3{,}16$
Pringels-Dose	24 cm	7,5 cm	$\frac{24}{7{,}5} = 3{,}2$
Fischfutter	25,1 cm	8 cm	$\frac{25{,}1}{8} = 3{,}1375$

Kreiszahl $\pi \approx 3{,}141592654$
Durchschnitt (Mittelwert): (3,16 + 3,43 + 3,15 + 3,16 + 3,2 + 3,14) : 6 = 3,21

MERKE:

Die Zahl Pi ist der Quotient aus Kreisumfang und Kreisdurchmesser: $\pi = \frac{u}{d}$

Sie ergibt gerundet: $\pi \approx 3{,}141592654$
In Wirklichkeit ist die Zahl Pi unendlich lang und wiederholt sich nicht in ihrer Ziffernfolge, es ist also eine irrationale Zahl.

Umfang (u) des Kreises

Umfang:

$\pi = \frac{u}{d}$ $u = \pi \cdot d$ Umfang ausgedrückt mit dem Durchmesser d des Kreises.

$\pi = \frac{u}{2 \cdot r}$ $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ Umfang ausgedrückt mit dem Radius r des Kreises.

Überprüfe die in der Tabelle angegebenen Beispiele mit Hilfe der neu gelernten Formel für den Umfang eines Kreises. Wer hat am genauesten gemessen?

CD: $u = 12 \cdot \pi$
$u = 37{,}7$ cm

Glas: $u = 7 \cdot \pi$
$u = 22{,}0$ cm

Mülleimer: $u = 20 \cdot \pi$
$u = 62{,}8$ cm

Keksdose: $u = 25 \cdot \pi$
$u = 78{,}5$ cm

Pringels-Dose: $u = 7{,}5 \cdot \pi$
$u = 23{,}6$ cm

Fischfutter-Büchse: $u = 8 \cdot \pi$
$u = 25{,}1$ cm

Mülleimer, CD und Fischfutter-Dose wurden am genauesten gemessen!

Die Entwicklungsgeschichte der Zahl π (aus Wikipedia.de):

Wie die **Bibel** im ersten Buch der Könige, Kapitel 7, Vers 23 berichtet, sollte ein rundes Becken umspannt werden: Hierauf fertigte er ein kreisrundes Becken an, das von einem Rand bis zum anderen 10 Ellen maß ..., eine Schnur von 30 Ellen umspannte es.

$\pi =$	Fehler: %

Genauer waren die Angaben in Ägypten. Das älteste bekannte Rechenbuch der Welt, das **Rechenbuch des Ahmes** (auch Papyrus Rhind, 17. Jahrhundert v. Chr.), nennt den Wert $(16/9)^2$.

$\pi =$	Fehler: %

Als Näherung für π benutzten die **Babylonier** 3+1/8.

$\pi =$	Fehler: %

In **Indien** benutzte man in den Sulbasutras, den Schnurregeln zur Konstruktion von Altären, den Wert $(26/15)^2$.

$\pi =$	Fehler: %

Archimedes von Syrakus (um 287 v. Chr. bis 212 v. Chr.) war ein antiker griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur.
Er kam zu der für die damalige Zeit äußerst bedeutsamen Abschätzung, dass das gesuchte Verhältnis etwas kleiner als $3+\frac{10}{70}$ sein müsse, jedoch größer als $3+\frac{10}{71}$ und benannte den Bruch $\frac{211875}{67441}$ für die Zahl π

$\pi =$	Fehler: %

Zu Chongzhi (430–501) berechnete für die Kreiszahl die ersten 7 Dezimalstellen exakt. Er kannte auch den fast genauso guten Näherungsbruch 355/113.

$\pi =$	Fehler: %

Handwerker benutzten in Zeiten vor Rechenschieber und Taschenrechner die Näherung 22/7 und berechneten damit vieles im Kopf. Der Fehler gegenüber π beträgt etwa 0,04 %.

$\pi =$	Fehler: %

Der derzeitige gültige Rekord der Berechnung von π wird durch **Yasumasa Kanada** auf einem HITACHI-Supercomputer mit 1.241.100.000.000 (1,2 Billionen) Stellen gehalten. An der 1.142.905.318.634. Nachkommastelle von π findet man laut Yasumasa Kanada wieder die Folge 314159265358.

Benutzt man die Computerschrift „Arial“ in der Schriftgröße 10, so passen auf eine DIN A4 Seite ca. 90 x 65 = 5850 Ziffern. Wie viele doppelseitig bedruckte DIN A 4 Seiten würde man zum Ausdrucken der Zahl π benötigen?

Anzahl der Seiten:

Infos zur Zahl Pi ($\pi \approx 3{,}141592654$) Lösungen

Die Entwicklungsgeschichte der Zahl π (aus Wikipedia.de):

Wie die **Bibel** im ersten Buch der Könige, Kapitel 7, Vers 23 berichtet, sollte ein rundes Becken umspannt werden: Hierauf fertigte er ein kreisrundes Becken an, das von einem Rand bis zum anderen 10 Ellen maß ..., eine Schnur von 30 Ellen umspannte es.

$\pi = 3$	Fehler: 4,5%

Genauer waren die Angaben in Ägypten. Das älteste bekannte Rechenbuch der Welt, das **Rechenbuch des Ahmes** (auch Papyrus Rhind, 17. Jahrhundert v. Chr.), nennt den Wert $(16/9)^2$.

$\pi = 3{,}160493827$	Fehler: 0,6%

Als Näherung für π benutzten die **Babylonier** 3+1/8.

$\pi = 3{,}125$	Fehler: 0,53%

In **Indien** benutzte man in den Sulbasutras, den Schnurregeln zur Konstruktion von religiösen Altären, den Wert $(26/15)^2$.

$\pi = 3{,}004444444$	Fehler: 4,366%

Archimedes von Syrakus (um 287 v. Chr. bis 212 v. Chr.) war ein antiker griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur.
Er kam zu der für die damalige Zeit äußerst bedeutsamen Abschätzung, dass das gesuchte Verhältnis etwas kleiner als $3+\frac{10}{70}$ sein müsse, jedoch größer als $3+\frac{10}{71}$ und benannte den Bruch $\frac{211875}{67441}$ für die Zahl π

$\pi = 3{,}141634911$	Fehler: 0,00135%

Zu Chongzhi (430–501) berechnete für die Kreiszahl die ersten 7 Dezimalstellen exakt. Er kannte auch den fast genauso guten Näherungsbruch 355/113.

$\pi = 3{,}14159292$	Fehler: 0,0000085%

Handwerker benutzten in Zeiten vor Rechenschieber und Taschenrechner die Näherung 22/7 und berechneten damit vieles im Kopf. Der Fehler gegenüber π beträgt etwa 0,04 %.

$\pi = 3{,}142857143$	Fehler: 0,0402%

Der derzeitige gültige Rekord der Berechnung von π wird durch **Yasumasa Kanada** auf einem HITACHI-Supercomputer mit 1.241.100.000.000 (1,2 Billionen) Stellen gehalten. An der 1.142.905.318.634. Nachkommastelle von π findet man laut Yasumasa Kanada wieder die Folge 314159265358.

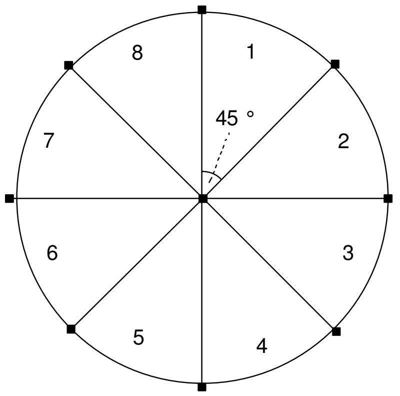
Benutzt man die Computerschrift „Arial“ in der Schriftgröße 10, so passen auf eine DIN A4 Seite ca. 90 x 65 = 5850 Ziffern. Wie viele doppelseitig bedruckte DIN A 4 Seiten würde man zum Ausdrucken der Zahl π benötigen?

Anzahl der Seiten (doppelt bedruckt): 106.076

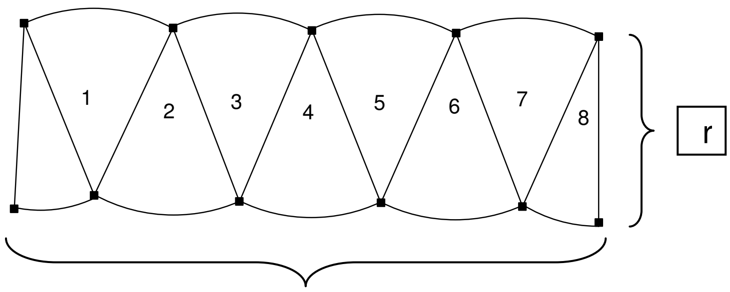
Flächeninhalt (A) des Kreises

Aufgabe:

Zeichne einen Kreis mit r = 4 cm und teile ihn in acht gleich große Teile.



Legt man jetzt die einzelnen Teile in folgender Art und Weise aneinander, so erhält man in etwa die Form eines Rechtecks.



$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot u}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 2 \cdot \pi \cdot r \\ \\ A_R = \frac{1}{2} \cdot u \cdot r \end{array}\right\} \quad A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot r \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot r^2$$

Die Formel für den Flächeninhalt (A) eines Kreises ausgedrückt mit seinem Radius (r) lautet also:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Die Formel für den Flächeninhalt (A) eines Kreises ausgedrückt mit seinem Durchmesser (d) lautet:

$$A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad A = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

Aufgabe:

Löse die Flächenformel nach der Variable r bzw. d auf.

$A = \pi \cdot r^2$	$A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$
$\frac{A}{\pi} = r^2$	$\frac{A}{\pi} = \left(\frac{d}{2}\right)^2$
$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r$	$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = \frac{d}{2}$
	$2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = d$

Beispiele:

1.) Ein Kreis besitzt einen Flächeninhalt (A) von 50 cm^2. Wie groß ist sein Radius (r) und sein Durchmesser (d)? Wie groß ist sein Umfang (u)?

2.) Ein Kreis besitzt einen Flächeninhalt (A) von 1 m^2. Wie groß ist sein Radius (r) und sein Durchmesser (d)? Wie groß ist sein Umfang (u)?

3.) Ein Kreis besitzt einen Umfang (u) von 1 m. Wie groß ist sein Radius (r) und sein Durchmesser (d)? Wie groß ist sein Flächeninhalt (A)?

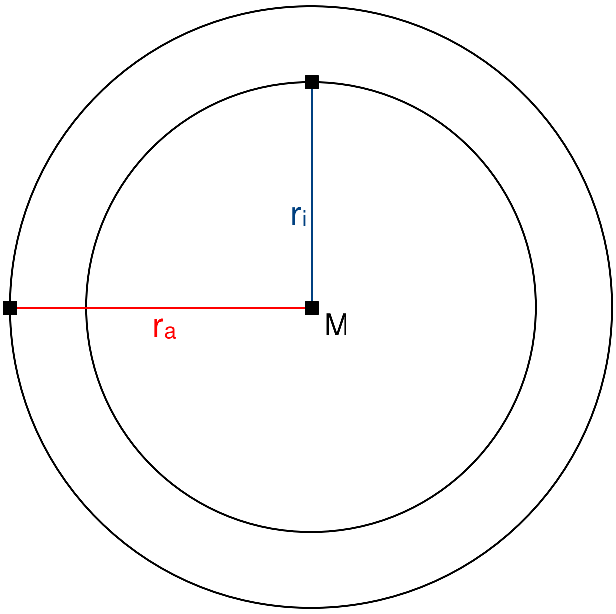
zu 1.)		zu 2.)		zu 3.)	
	$A = \pi \cdot r^2$		$A = \pi \cdot r^2$		$u = 2 \cdot \pi \cdot r$
	$50 = \pi \cdot r^2$		$10000 = \pi \cdot r^2$		$100 = 2 \cdot \pi \cdot r$
	$\frac{50}{\pi} = r^2$		$\frac{10000}{\pi} = r^2$		$\frac{100}{2\pi} = r$
	$\sqrt{\frac{50}{\pi}} = r$		$\sqrt{\frac{10000}{\pi}} = r$		
	$r = 4\ cm$		$r = 56,4\ cm$		$r = 15,9\ cm$
	$d = 8\ cm$		$d = 112,8\ cm$		$d = 31,8\ cm$
	$u = 25,1\ cm$		$u = 354,4\ cm$		$A = 794,23\ cm^2$

Der Flächeninhalt des Kreisringes

Aufgabe:

Um einen kreisförmigen Gartenteich mit einem Radius von 4 m soll ein Weg mit 1 m Breite angelegt werden.

a.) Wie groß ist die Fläche des Weges?
b.) Notiere eine Formel für diese Fläche.



zu a.)

$$A_{KR} = \pi \cdot r_a^2 - \pi \cdot r_i^2$$
$$A_{KR} = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 4^2$$
$$A_{KR} = 28{,}27\ m^2$$

zu b.)

$$A_{KR} = \pi \cdot r_a^2 - \pi \cdot r_i^2$$
$$A_{KR} = \pi \cdot \left(r_a^2 - r_i^2\right)$$

Aufgabe:

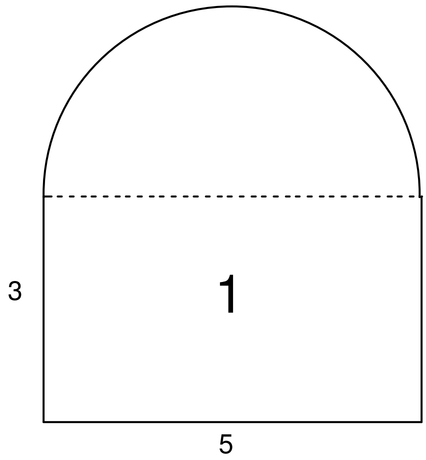
Löse die Formel für den Kreisring nach der Variablen für den äußeren Kreisradius (r_a) und für den inneren Kreisradius (r_i) auf:

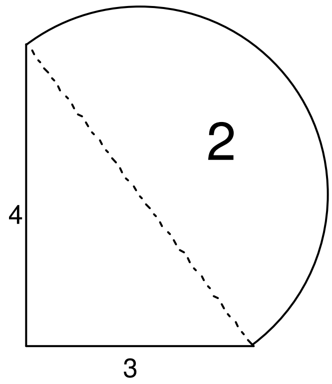
$$A_{KR} = \pi \cdot r_a^2 - \pi \cdot r_i^2$$
$$A_{KR} = \pi \cdot \left(r_a^2 - r_i^2\right)$$
$$\frac{A_{KR}}{\pi} = r_a^2 - r_i^2$$
$$\frac{A_{KR}}{\pi} - r_a^2 = -r_i^2$$
$$r_a^2 - \frac{A_{KR}}{\pi} = r_i^2$$
$$\sqrt{r_a^2 - \frac{A_{KR}}{\pi}} = r_i$$

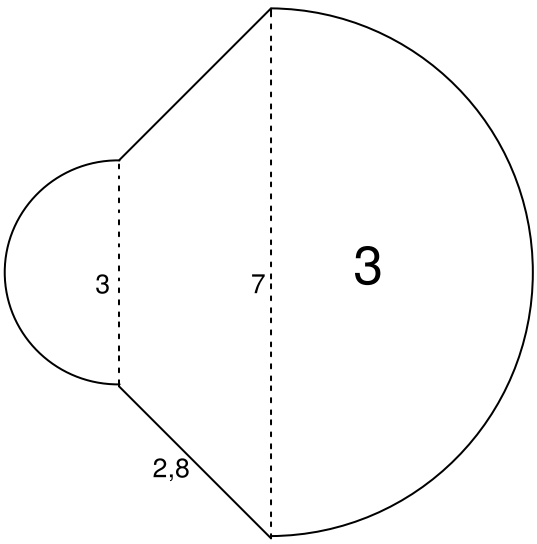
$$A_{KR} = \pi \cdot r_a^2 - \pi \cdot r_i^2$$
$$A_{KR} = \pi \cdot \left(r_a^2 - r_i^2\right)$$
$$\frac{A_{KR}}{\pi} + r_i^2 = r_a^2$$
$$\sqrt{\frac{A_{KR}}{\pi} + r_i^2} = r_a$$

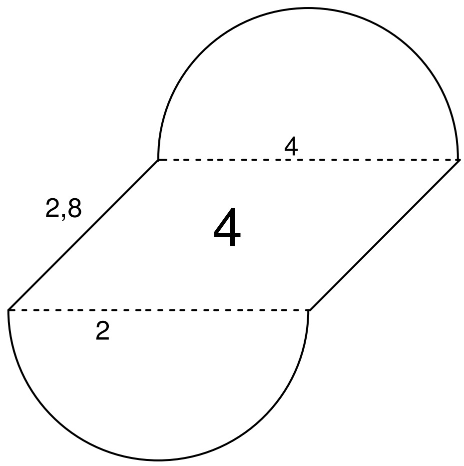
Fläche und Umfang von Kreis und Kreisring

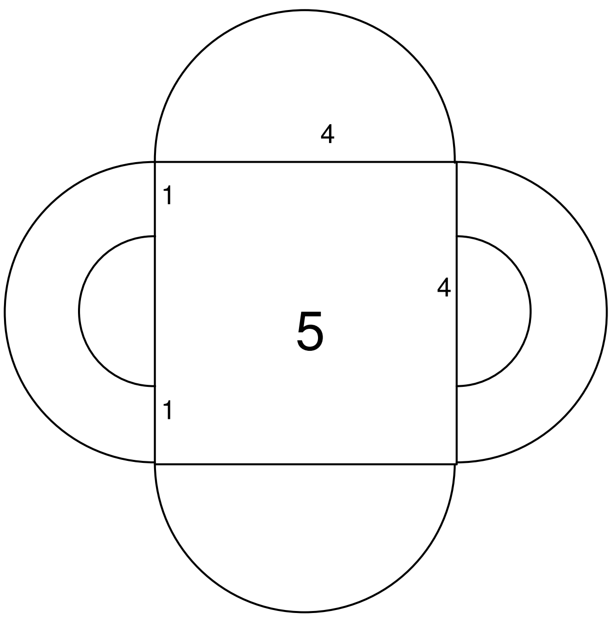
Bestimme den Flächeninhalt (A) und den Umfang (u) der folgenden Figuren. Benutze dazu die angegebenen Werte in der Zeichnung (angegeben in cm) und führe danach die Berechnungen im Hausheft aus.

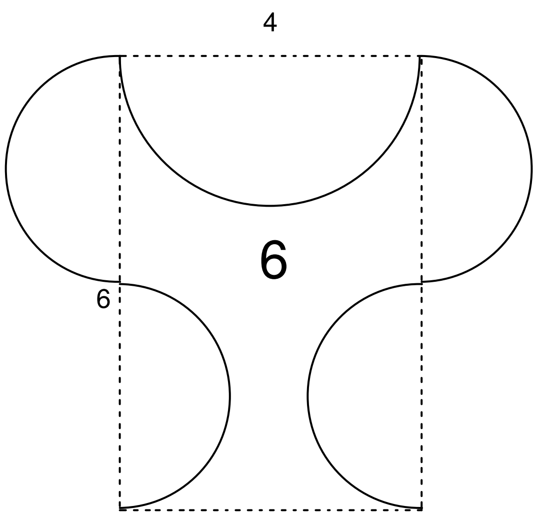












Fläche und Umfang von Kreis und Kreisring (Lösungen)

Figur 1:

$u = 11 + 7{,}85$
$u = 18{,}85 \text{ cm}$

$A = 15 + 9{,}82$
$A = 24{,}82 \text{ cm}^2$

Figur 2:

$u = 7 + 7{,}85$
$u = 14{,}85 \text{ cm}$

$A = 6 + 9{,}82$
$A = 15{,}82 \text{ cm}^2$

Figur 3:

$u = 4{,}7 + 5{,}6 + 11$
$u = 21{,}3 \text{ cm}$

$A = 3{,}53 + 10 + 19{,}24$
$A = 32{,}77 \text{ cm}^2$

Figur 4:

$u = 12{,}6 + 5{,}6$
$u = 18{,}2 \text{ cm}$

$A = 12{,}57 + 8$
$A = 20{,}57 \text{ cm}^2$

Figur 5:

$A = 16 + 12{,}56 + 3{,}14 \cdot (2^2 - 1^2)$
$A = 16 + 12{,}56 + 9{,}42$
$A = 37{,}98 \text{ cm}^2$

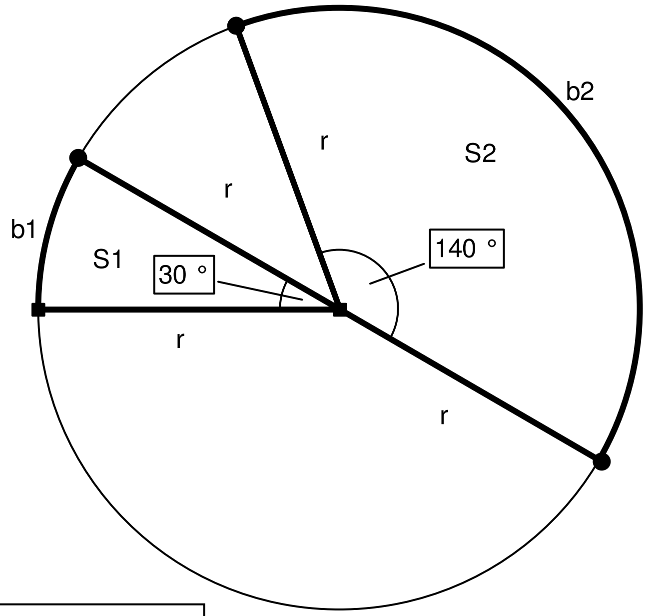
Figur 6:

$u = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 + \pi \cdot 2 + 4$
$u = 9{,}4 + 6{,}3 + 4$
$u = 19{,}7 \text{ cm}$

$A = 24 - 6{,}28$
$A = 17{,}72 \text{ cm}^2$

Kreissektor und Kreisbogen

In der rechts abgebildeten Zeichnung sieht man einen Kreis mit dem Radius r = 4 cm und einen Kreissektor (S1) mit dem Mittelpunktswinkel α = 30° und einen Kreissektor (S2) mit dem Mittelpunktswinkel α = 140°. Das Teil der Kreislinie, das den Sektor begrenzt, bezeichnet man als Bogen (b1 und b2).



1.) Berechne die Fläche (A_α) des Kreissektors S1.
2.) Berechne die Länge (b_α) des Bogens b1.

3.) Berechne die Fläche (A_α) des Kreissektors S2.
4.) Berechne die Länge (b_α) des Bogens b2.

5.) Versuche eine Formel zu finden, die die Fläche (A_α) eines Sektors bei beliebigem Mittelpunktswinkel α angibt.

und:

6.) Versuche eine Formel zu finden, die die Länge (b_α) eines Bogens bei beliebigem Mittelpunktswinkel α angibt.

Bitte diesen Teil ins Merkheft einkleben!

✂--

Versuche nun mit Hilfe der gefundenen Formeln folgende Aufgaben zu lösen:

1.) In einen Kreis mit r = 5 cm ist ein Sektor mit dem Mittelpunktswinkel α = 75° eingetragen.

a.) Berechne die Fläche (A_α) dieses Sektors.
b.) Berechne die Länge (b_α) des Bogens.

2.) In einen Kreis mit r = 7 cm ist ein Sektor mit der Bogenlänge b_α = 2,5 cm eingetragen.

a.) Wie groß ist der Mittelpunktswinkel (α) und die Fläche (A_α) dieses Sektors?
b.) Wie viel Prozent der Kreisfläche entspricht diese Sektorfläche?

3.) In einen Kreis mit r = 6 cm ist ein Sektor mit der Fläche A_α = 25 cm^2 eingetragen.

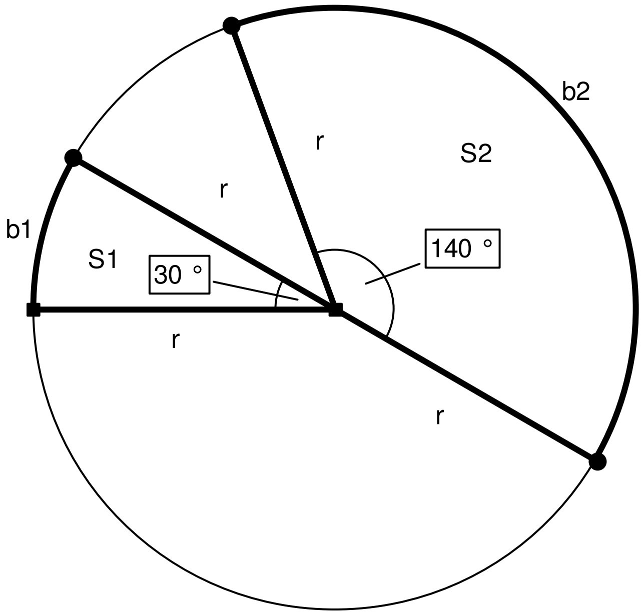
a.) Wie groß ist der Mittelpunktswinkel (α) und die Länge (b_α) des zugehörigen Bogens?
b.) Wie viel Prozent des Kreisumfangs entspricht die Bogenlänge?

4.) Der Flächeninhalt (A_α) eines Kreissektors entspricht 19% der Kreisfläche (A) eines Kreises mit dem Radius r = 15 cm.

a.) Wie groß ist der Flächeninhalt (A_α) dieses Sektors?
b.) Wie lang ist der zu diesem Sektor gehörige Bogen?
c.) Wie groß ist der zugehörige Mittelpunktswinkel α?

Kreissektor und Kreisbogen (Lösungen)

In der rechts abgebildeten Zeichnung sieht man einen Kreis mit dem Radius r = 4 cm und einen Kreissektor (S1) mit dem Mittelpunktswinkel α = 30° und einen Kreissektor (S2) mit dem Mittelpunktswinkel α = 140°. Das Teil der Kreislinie, das den Sektor begrenzt, bezeichnet man als Bogen (b1 und b2).



1.) Berechne die Fläche (A_α) des Kreissektors S1.
2.) Berechne die Länge (b_α) des Bogens b1.

3.) Berechne die Fläche (A_α) des Kreissektors S2.
4.) Berechne die Länge (b_α) des Bogens b2.

5.) Versuche eine Formel zu finden, die die Fläche (A_α) eines Sektors bei beliebigem Mittelpunktswinkel α angibt.

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{A_S}{A_K} \qquad \frac{\alpha}{360°} = \frac{A_S}{\pi \cdot r^2} \qquad A_S = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$$ und

6.) Versuche eine Formel zu finden, die die Länge (b_α) eines Bogens bei beliebigem Mittelpunktswinkel α angibt.

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{b}{u_K} \qquad \frac{\alpha}{360°} = \frac{b}{2 \cdot \pi \cdot r} \qquad b = \frac{\alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{360°} = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180°}$$

Bitte diesen Teil ins Merkheft einkleben!

---

zu 1.)

a.) $A_S = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$ $\qquad A_S = \frac{75 \cdot \pi \cdot 5^2}{360°}$ $\qquad A_S = 16{,}36\ cm^2$

b.) $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180°}$ $\qquad b = \frac{75 \cdot \pi \cdot 5}{180°}$ $\qquad b = 6{,}54\ cm$

---

zu 2.)

a.) $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180°}$ $\qquad \alpha = \frac{b \cdot 180°}{\pi \cdot r}$ $\qquad \alpha = \frac{2{,}5 \cdot 180°}{\pi \cdot 7}$ $\qquad \alpha = 20{,}46°$

$A_S = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$ $\qquad A_S = \frac{20{,}46 \cdot \pi \cdot 7^2}{360°}$ $\qquad A_S = 8{,}75\ cm^2$

b.) $p = \frac{A_S \cdot 100}{A_K}$ $\qquad p = \frac{8{,}75 \cdot 100}{153{,}94}$ $\qquad p = 5{,}68\%$

---

zu 3.)

a.) $A_S = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$ $\alpha = \frac{A_S \cdot 360°}{\pi \cdot r^2}$ $\alpha = \frac{25 \cdot 360°}{\pi \cdot 6^2}$ $\alpha = 79{,}58°$

$b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180°}$ $b = \frac{79{,}58 \cdot \pi \cdot 6}{180°}$ $b = 8{,}33\ \text{cm}$

b.) $p = \frac{b \cdot 100}{u_K}$ $p = \frac{8{,}33 \cdot 100}{37{,}7}$ $p = 22{,}1\%$

---

zu 4.)

a.) $A_K = \pi \cdot r^2$ $A_K = \pi \cdot 15^2$ $A_K = 706{,}86\ \text{cm}^2$

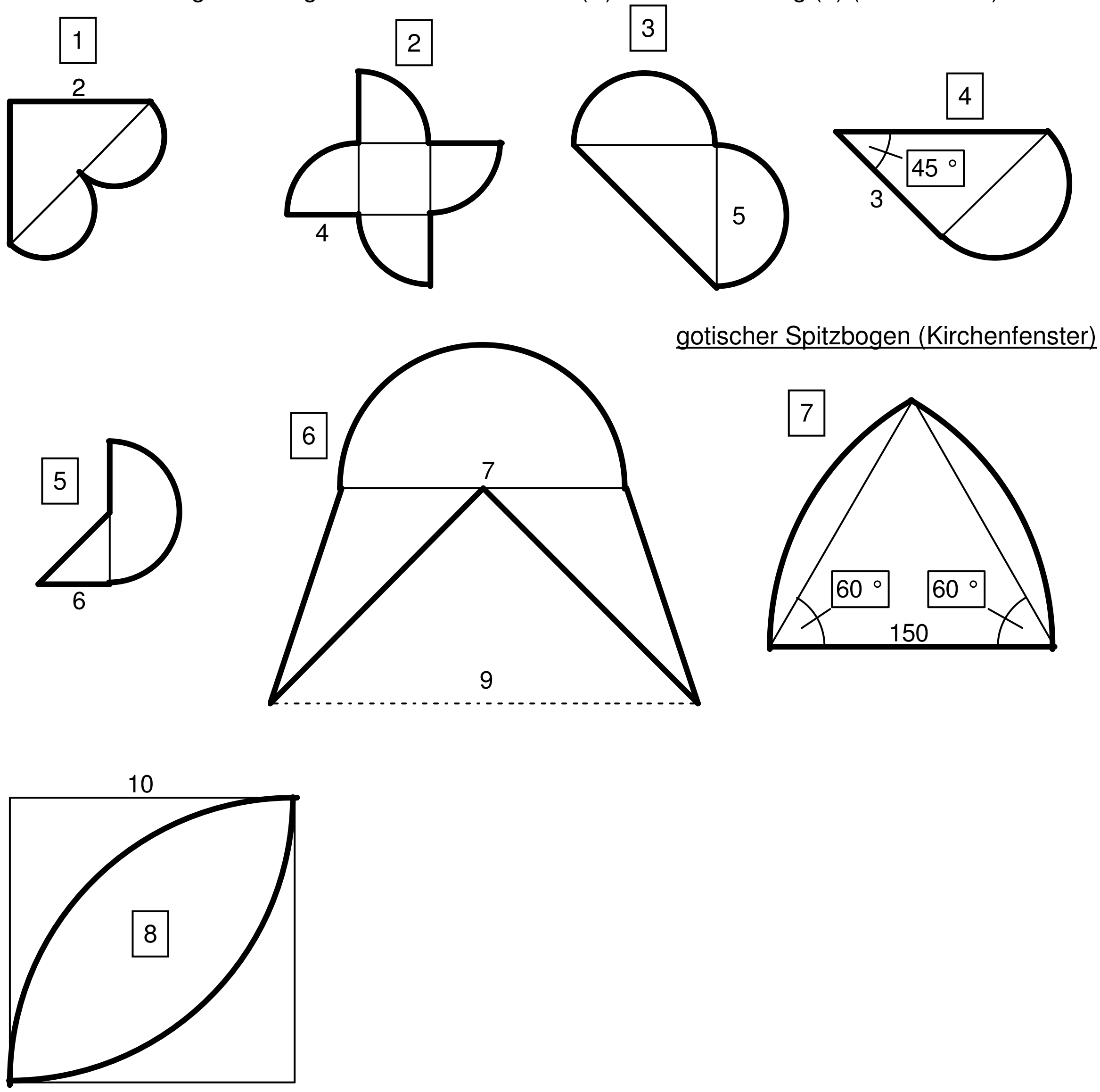
$Pw = \frac{706{,}86 \cdot 19}{100}$ $Pw = A_S = 134{,}3\ \text{cm}^2$

b.) $\frac{A_S}{A_K} = \frac{b}{u_K}$ $b = \frac{A_S \cdot u_K}{A_K}$ $b = \frac{134{,}3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 15}{706{,}86}$ $b = 17{,}91\ \text{cm}$

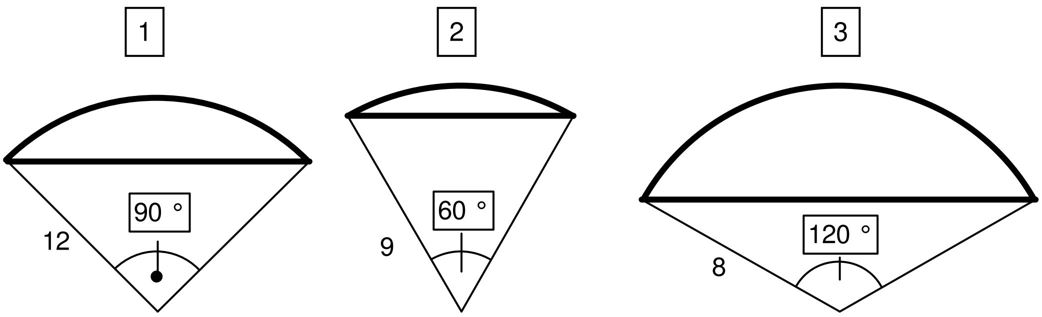
c.) $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180°}$ $\alpha = \frac{b \cdot 180°}{\pi \cdot r}$ $\alpha = \frac{17{,}91 \cdot 180°}{\pi \cdot 15}$ $\alpha = 68{,}41°$

Fläche und Umfang von Kreisteilen

1.) Berechne von nachfolgenden Figuren den Flächeninhalt (A) und den Umfang (u) (Maße in cm):



2.) Die Fläche eines Kreisabschnitts (A_s) (Kreissegment) lässt sich aus der Differenz von Sektorfläche (A_α) und Dreiecksfläche (A_D) bestimmen (Maße in cm):



Kreissektor und Kreisbogen (Lösungen)

Blatt: Kreissektor und Kreisbogen Teil 1

zu 1.)

$A_a = \frac{r^2 \cdot \Pi \cdot \alpha}{360}$

$A_a = \frac{4^2 \cdot \Pi \cdot 30}{360}$

$A_a = 4{,}19\ cm^2$ $\qquad S_1 = 4{,}19\ cm^2$

zu 2.)

$b_a = \frac{r \cdot \Pi \cdot \alpha}{180}$

$b_a = \frac{4 \cdot \Pi \cdot 30}{180} = \frac{4 \cdot \Pi}{6}$

$b_a = 2{,}09\ cm$ $\qquad b_1 = 2{,}09\ cm$

zu 3.)

$A_a = \frac{r^2 \cdot \Pi \cdot \alpha}{360}$

$A_a = \frac{4^2 \cdot \Pi \cdot 140}{360}$

$A_a = 19{,}55\ cm^2$ $\qquad S_2 = 19{,}55\ cm^2$

zu 4.)

$b_a = \frac{r \cdot \Pi \cdot \alpha}{180}$

$b_a = \frac{4 \cdot \Pi \cdot 140}{180}$

$b_a = 9{,}77\ cm$ $\qquad b_2 = 9{,}77\ cm$

zu 5.) $A_a = \frac{r^2 \cdot \Pi \cdot \alpha}{360}$ und $A_a = \frac{b_\alpha \cdot r}{2}$

zu 6.) $b_a = \frac{r \cdot \Pi \cdot \alpha}{180}$ oder $b_a = \frac{2 \cdot r \cdot \Pi \cdot \alpha}{360}$

Blatt Kreissektor und Kreisbogen Teil 2

zu 1.) a.)

$A_\alpha = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$

$A_\alpha = \frac{5^2 \cdot \pi \cdot 75}{360}$

$A_\alpha = 16{,}36\ cm^2$

b.)

$b_\alpha = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$

$b_\alpha = \frac{5 \cdot \pi \cdot 75}{180}$

$b_\alpha = 6{,}54\ cm$

zu 2.) a.)

$\frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180} = b_\alpha \qquad / \cdot 180$

$r \cdot \Pi \cdot \alpha = b_\alpha \cdot 180 \qquad / : (r \cdot \Pi)$

$\alpha = \frac{b_\alpha \cdot 180}{r \cdot \pi}$

$\alpha = \frac{2{,}5 \cdot 180}{7 \cdot \pi}$

$\alpha = 20{,}46^\circ$

$A_\alpha = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$

$A_\alpha = \frac{7^2 \cdot \pi \cdot 20{,}46}{180}$

$A_\alpha = 8{,}75\ cm^2$

b.) $\frac{8{,}75 \cdot 100}{7^2 \cdot \pi} = 5{,}68\ \%$

Die Sektorfläche entspricht 5,68 % der Kreisfläche.

zu 3.) a.)

$\frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360} = A_\alpha$ / · 360

$r^2 \cdot \Pi \cdot \alpha = A_\alpha \cdot 360$ / :($r^2 \cdot \Pi$)

$\alpha = \frac{A_\alpha \cdot 360}{r^2 \cdot \pi}$

$\alpha = \frac{25 \cdot 360}{6^2 \cdot \pi}$

$\alpha = 79{,}58^\circ$

$b_\alpha = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$

$b_\alpha = \frac{6 \cdot \pi \cdot 79{,}58}{180}$

$b_\alpha = 8{,}33$ cm

b.)

$\frac{8{,}33 \cdot 100}{2 \cdot 6 \cdot \pi} = 22{,}1$ %

Die Bogenlänge entspricht 22,1 % des Kreisumfangs.

zu 4.) a.)

$r^2 \cdot \Pi = A_{ges.}$

$15^2 \cdot \Pi = A_{ges.}$

$706{,}86\ cm^2 = A_{ges.}$

100 % — 706,86 cm²

19 % — 134,30 cm²

Der Flächeninhalt des Sektors beträgt 134,30 cm².

b.)

$A_\alpha = \frac{b_\alpha \cdot r}{2}$ / · 2

$A_\alpha \cdot 2 = b_\alpha \cdot r$ / : r

$\frac{A_\alpha \cdot 2}{r} = b_\alpha$

$\frac{134{,}30 \cdot 2}{15} = 17{,}91$ cm

Der zu dem Sektor gehörige Bogen ist 17,91 cm lang.

c.)

$A_\alpha = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ / · 360

$A_\alpha \cdot 360 = r^2 \cdot \Pi \cdot \alpha$ / : ($r^2 \cdot \Pi$)

$\frac{A_\alpha \cdot 360}{(r^2 \cdot \pi)} = \alpha$

$\frac{134{,}30 \cdot 360}{(15^2 \cdot \pi)} = 68{,}4^\circ$

Der Mittelpunktswinkel α ist 68,4° groß.

zu 5.) a.)

$\frac{b_\alpha \cdot r}{2} = A_\alpha$ / · 2

$b_\alpha \cdot r = A_\alpha \cdot 2$ / : b_α

$r = \frac{A_\alpha \cdot 2}{b_\alpha}$

$r = \frac{50 \cdot 2}{8}$

r = 12,5 cm

Der Radius ist 12,5 cm groß.

$\frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180} = b_\alpha$ / · 180

$r \cdot \Pi \cdot \alpha = b_\alpha \cdot 180$ / : (r · Π)

$\alpha = \frac{b_\alpha \cdot 180}{r \cdot \pi}$

$\alpha = \frac{8 \cdot 180}{12{,}5 \cdot \pi}$

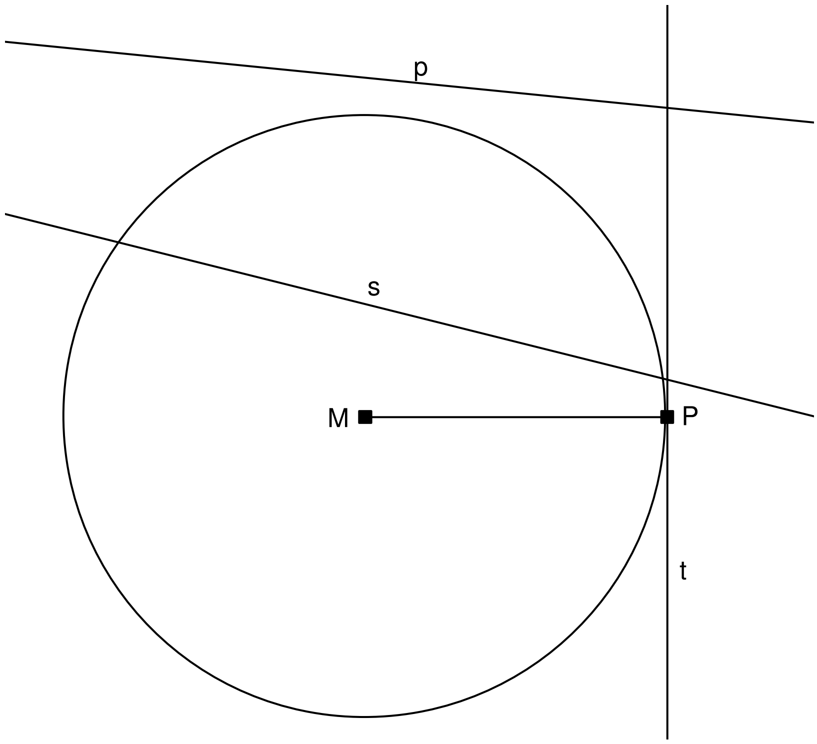
$\alpha = 36{,}37^\circ$

Der Mittelpunktswinkel ist 36,67° groß.

Kreis und Gerade

Aufgabe:

Zeichne einen Kreis mit r = 4cm. Zeichne eine Gerade (s), die den Kreis in 2 Punkten schneidet, eine Gerade (p), die den Kreis in keinem Punkt schneidet und eine Gerade (t), die den Kreis in einem Punkt berührt.



MERKE:

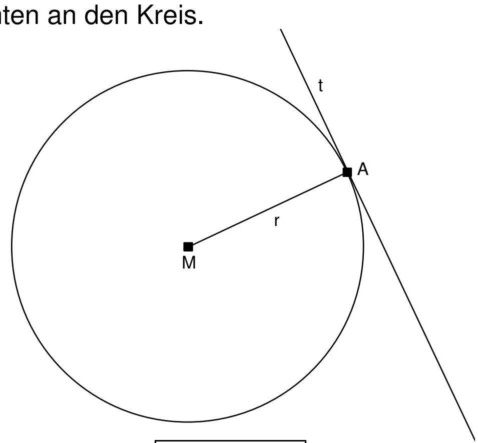
Ein Kreis und eine Gerade können folgende drei Positionen zueinander einnehmen:

1.) Die Gerade schneidet den Kreis in 2 Punkten (Sekante).
2.) Die Gerade schneidet den Kreis in keinem Punkt (Passante).
3.) Die Gerade berührt den Kreis in einem Punkt (Tangente). Diese Tangente bildet mit ihrem Berührradius MP einen rechten Winkel.

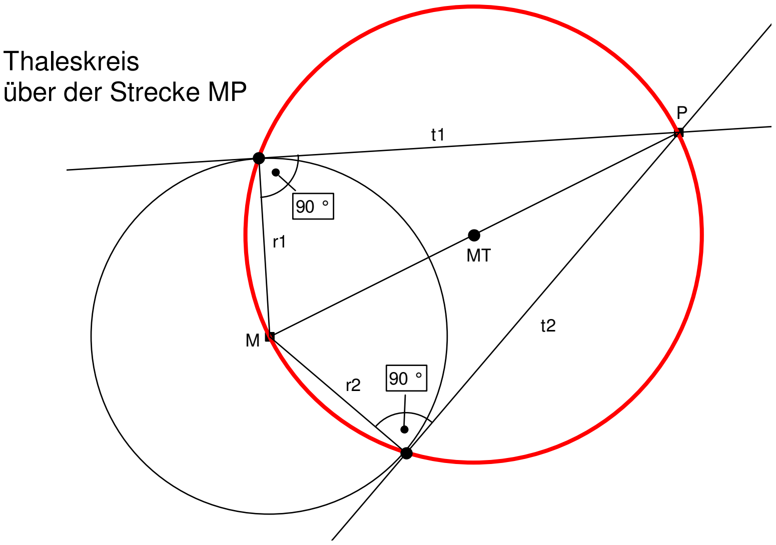
<u>Tangentenkonstruktionen:</u>

1.) Zeichne einen Kreis mit r = 3,5 cm. Markiere einen Punkt A auf der Kreislinie. Zeichne die Tangente t, die den Kreis im Punkt A berührt.
2.) Zeichne einen Kreis mit dem r = 3,5 cm. Markiere einen Punkt P außerhalb des Kreises. Konstruiere durch P die Tangenten an den Kreis.

zu 1.)



zu 2.)

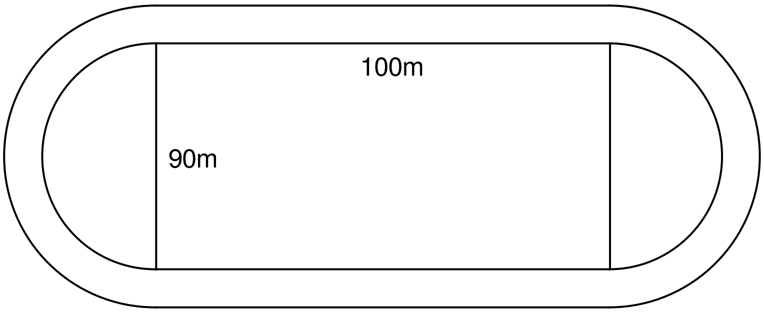


Kreis und Kreisteile

1.) Eine Raumstation umkreist die Erde (Erdradius 6378 km) in 200 km Höhe. Eine Erdumkreisung dauert 90 Minuten.
   a.) Welche Entfernung legt die Raumstation bei einem Erdumlauf zurück?
   b.) Welche Entfernung legt sie in 1 Stunde zurück, mit welcher Geschwindigkeit fliegt sie also?

2.) In einem Park befindet sich eine kreisförmige Rasenfläche mit 10 m Durchmesser.
   a.) Der Rasen soll gedüngt werden. Auf der Verpackung steht: 10 kg für 300 m^2. Wie viel kg werden für die Rasenfläche benötigt.
   b.) Um die Rasenfläche soll ein 75 cm breiter Weg angelegt werden. Hierzu werden Pflastersteine bestellt, die 45 € pro m^2 kosten. Wie teuer wird der Weg, wenn 16% Mehrwertsteuer hinzukommen?

3.) Nach nebenstehender Zeichnung soll eine Laufbahn mit der Breite 8 m erstellt werden.
   a.) Was kostet die Herstellung der Laufbahn bei einem Quadratmeterpreis von 275 €?
   b.) Im Innenraum soll Rasen gesät werden; das kostet 15 € pro m^2. Berechne den Gesamtpreis der Sportanlage.



4.) Aus einem quadratischen Wachstuch von 1,2 m Kantenlänge wird eine runde Tischdecke mit maximaler Größe herausgeschnitten.
   Wie groß wird sie und wie viel Prozent beträgt der Abfall?

5.) Der große Zeiger einer Turmuhr ist 1,5 m lang, der kleine 1,1 m lang.
   a.) Berechne den Weg, den die Zeigerspitzen in einer Stunde, an einem Tag, in einem Jahr zurücklegen.
   b.) Berechne die Fläche des Sektors, den der große (kleine) Zeiger in 10 (25) Minuten überstrichen hat.

6.) Das Rad eines ICE hat einen Durchmesser von 95 cm.
   a.) Wie viele Umdrehungen kommen auf 1 km Fahrstrecke?
   b.) Wie oft dreht sich das Rad auf dem Weg von Hannover nach München (645 km)?
   c.) Wie oft dreht es sich in 1 Sekunde bei einer Geschwindigkeit von 180 km/h?

7.) Eine Eisenbahnkurve hat einen Innenradius von 1230 m. Sie verbindet zwei geradlinige Bahnstrecken und umspannt dabei einen Mittelpunktswinkel von 125°.
   Wie viel Meter Schiene werden für das Kurvengleis benötigt (Spurweite 1435 mm)?
   Skizze mit Bemaßung anfertigen!

8.) Der Scheibenwischer eines PKW macht Ausschläge von 140°. Der wischende Gummi ist 50 cm lang und sein unteres Ende 20 cm vom Drehpunkt entfernt.
   Wie groß ist die Fläche, die der Wischer überstreicht? (Skizze mit Bemaßung anfertigen!)

9.) Das Pendel einer Standuhr überstreicht einen Ausschlagwinkel von 14°. Dabei legt die Spitze des Pendels jeweils eine Strecke von 47,12 cm zurück.
   Berechne die Länge des Pendels.

10.) Eine Pizza mittlerer Größe hat einen Durchmesser von etwa 26 cm. Eine große Pizza dagegen hat einen Durchmesser von etwa 36 cm.
   Um wie viel Prozent ist die Fläche der zweiten Pizza größer?

Lösungen:
1.) a.) 41330,793 km b.) 27553,862 km/h 2.) a.) 78,54m^2 2,618 kg b.) 25,33m^2 1322,23€
3.) a.) 4063,01m^2 1.117.327,75€ b.) 15361,73m^2 230.425,95€ 1.347.753,70€
4.) a.) 1,44m^2 1,13m^2 21,53% 5.) a.) (1,5m) 9,42m 226,08m 82.559,35m (1,1m) 0,58m 13,92 m 5080,8m b.) 1,18m^2 2,95m^2 0,05m^2 0,13m^2 6.) a.) 2,98m 335,57 U b.) 216.442,95 U c.) 16,78 U 7.) 2683,44m 2686,57m 5370,01m 8.) 5986,58cm^2 488,69cm^2 5497,79cm^2 0,55m^2
9.) 192,8cm 10.) 530,93cm^2 1017,88cm^2 91,72%