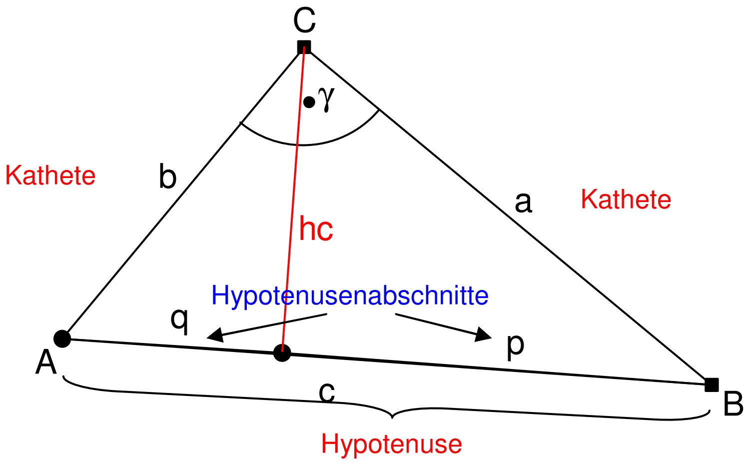
Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck

Aufgabe:

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus a = 7 cm, b = 5 cm $\gamma = 90^{\circ}$ und zeichne die Höhe h_c ein.



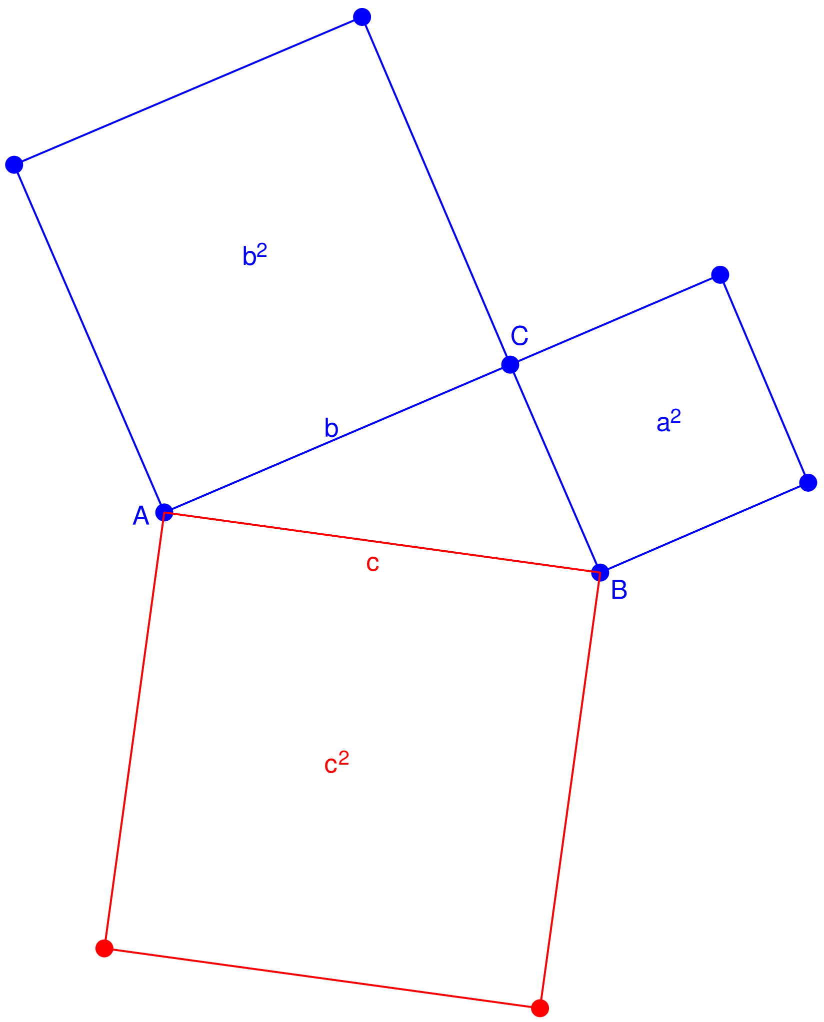
MERKE:

Katheten:	Seiten im Dreieck, die den 90° – Winkel einschließen.
Hypotenuse:	Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. (Längste Seite im Dreieck)
Hypotenusenabschnitte:	Die Höhe zur Hypotenuse zerlegt die Hypotenuse in zwei Hypotenusen-abschnitte: p ist die Länge des Hypotenusenabschnitts, der zur Kathete a gehört. q ist die Länge des Hypotenusenabschnitts, der zur Kathete b gehört.

Aufgabe:

Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus a = 3 cm, b = 5 cm, $\gamma = 90^{\circ}$.

a.) Färbe die Katheten blau und die Hypotenuse rot.
b.) Zeichne ein Quadrat über die Kathete a, über die Kathete b und unter die Hypotenuse c.
c.) Berechne die Flächen der Quadrate.
d.) Besteht eine Bedeutung zwischen den Flächen?



zu c.)

$A = a^2$	$A = b^2$	$A = c^2$
$A = 3^2$	$A = 5^2$	$A = 5{,}8^2$
$A = 9\ \text{cm}^2$	$A = 25\ \text{cm}^2$	$A = 33{,}64\ \text{cm}^2$

zu d.)

Offensichtlich gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ denn $9\ \text{cm}^2 + 25\ \text{cm}^2 \approx 33{,}64\ \text{cm}^2$

MERKE:

<u>Satz des Pythagoras</u>

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate.

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{für } \gamma = 90°$$

Daraus folgt:

$$a^2 = c^2 - b^2 \qquad \text{und:} \qquad b^2 = c^2 - a^2 \qquad \text{für } \gamma = 90°$$

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras lässt sich jeweils die fehlende Seite eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen, wenn die anderen beiden Seiten gegeben sind.

zu d.)

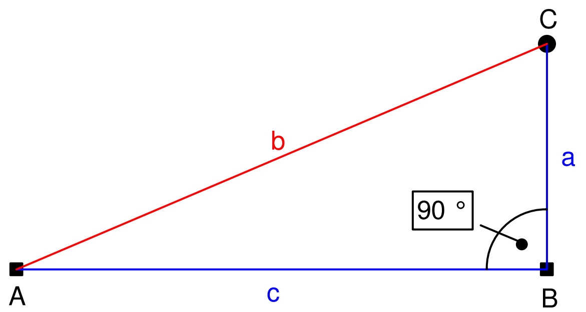
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 5^2 + 3^2 &= c^2 \\ 34 &= c^2 \\ 5{,}83095\ldots &= c \end{aligned}$$

Aufgabe:

1.) Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus: c = 7 cm ; a = 3 cm ; $\beta = 90°$

a.) Färbe die Katheten blau und die Hypotenuse rot.
b.) Berechne die Länge der Seite b.

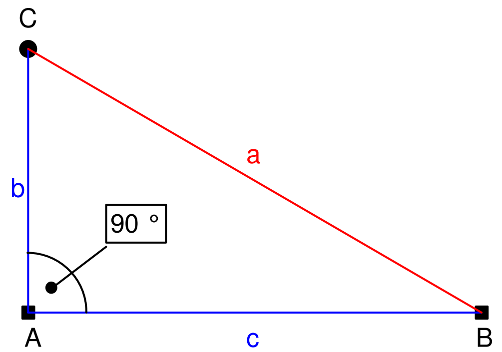
$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 \\ b^2 &= 3^2 + 7^2 \\ b^2 &= 58 \\ b &= 7{,}62\text{ cm} \end{aligned}$$



2.) Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck aus: c = 6 cm ; b = 3,5 cm ; $\alpha = 90°$

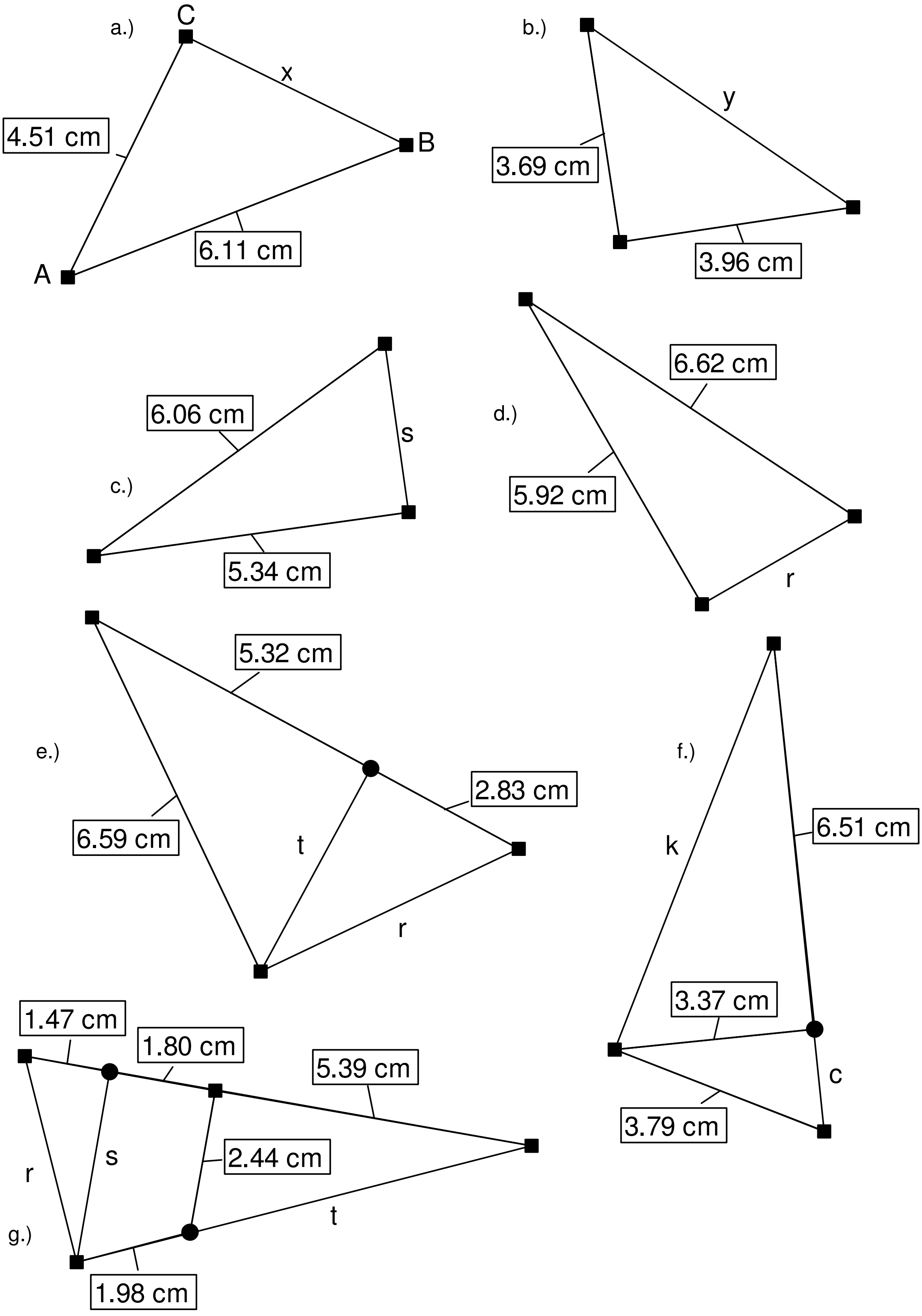
c.) Färbe die Katheten blau und die Hypotenuse rot.
d.) Berechne die Länge der Seite a.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ a^2 &= 3{,}5^2 + 6^2 \\ a^2 &= 48{,}25 \\ a &= 6{,}95\text{ cm} \end{aligned}$$



Satz des Pythagoras (I)

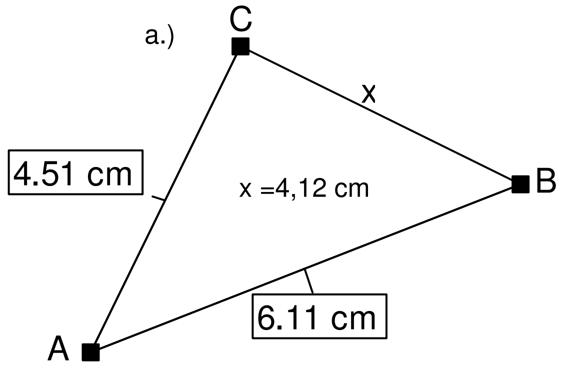
1.) Bestimme jeweils mit Hilfe der angegebenen Maße die Längen der fehlenden Seiten. Notiere dazu immer die Ausgangsgleichung nach dem Satz des Pythagoras und berechne dann den Wert mit dem TR. Überprüfe danach an der Zeichnung, ob du richtig gerechnet hast.



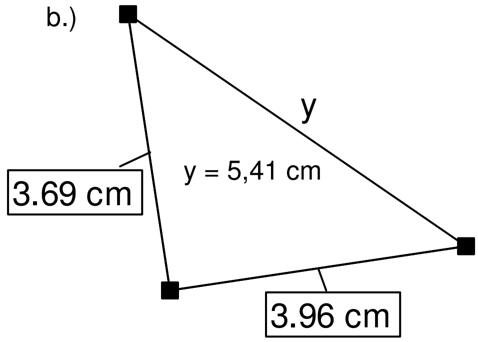
Satz des Pythagoras (I) Lösungen

2.) Bestimme jeweils mit Hilfe der angegebenen Maße die Längen der fehlenden Seiten. Notiere dazu immer die Ausgangsgleichung nach dem Satz des Pythagoras und berechne dann den Wert mit dem TR. Überprüfe danach an der Zeichnung, ob du richtig gerechnet hast.

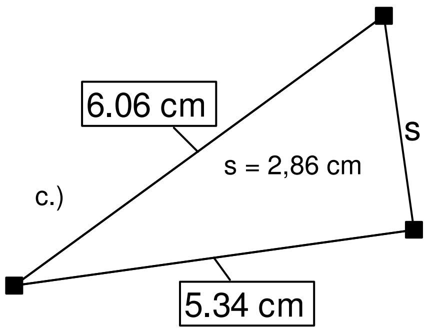
a.)



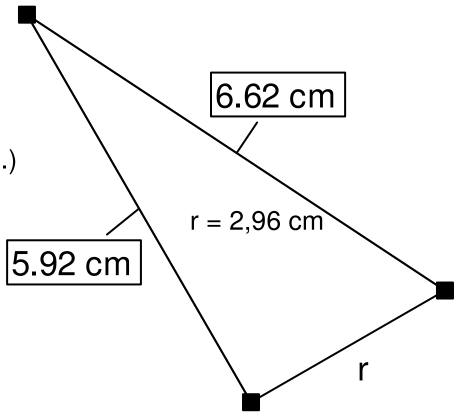
b.)



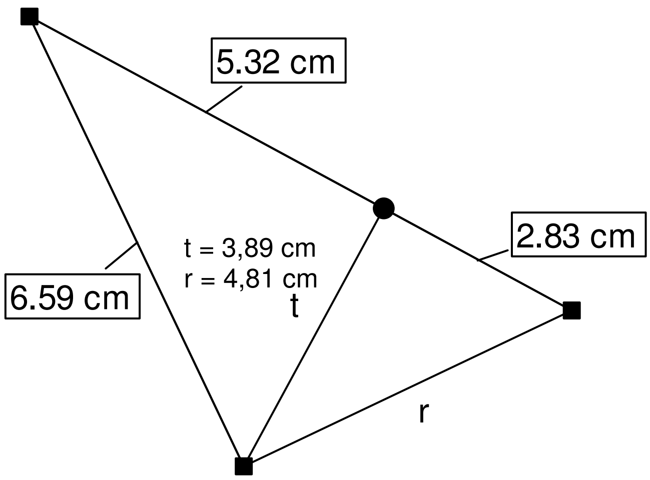
c.)



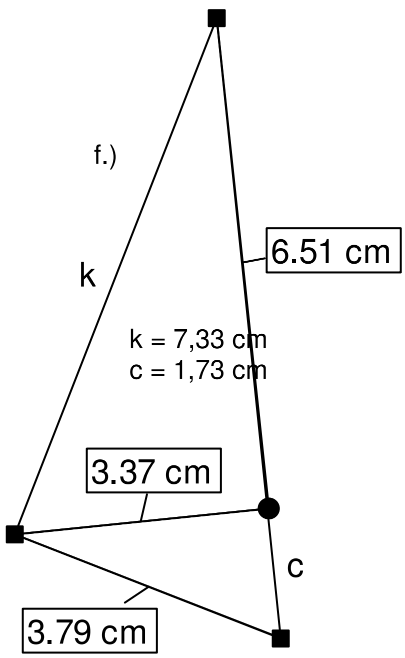
d.)



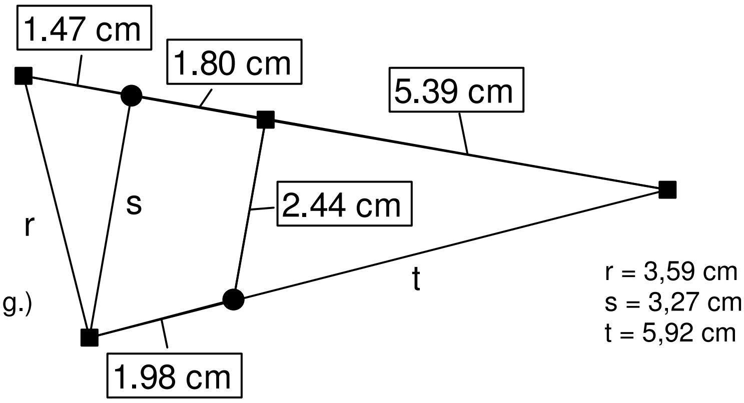
e.)



f.)



g.)

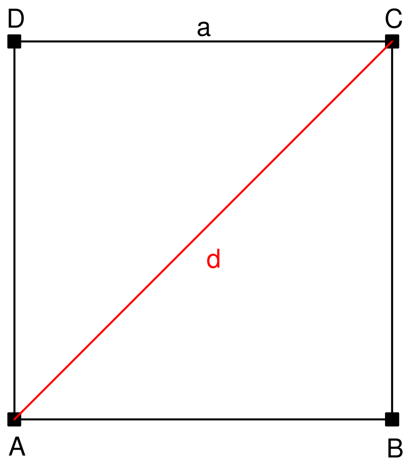


Anwendung des Satzes von Pythagoras

1.) Pythagoras bei ebenen Figuren:

Aufgabe:

a.) Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge a = 5 cm.
b.) Berechne die Länge der Diagonalen d.
c.) Entwickle eine Formel zur Berechnung dieser Diagonallänge. Benutze dazu nur die Buchstaben a und d.



zu b.)

$d^2 = a^2 + a^2$

$d^2 = 5^2 + 5^2$

$d^2 = 50$

$d = 7{,}1\,\text{cm}$

zu c.)

$d^2 = a^2 + a^2$

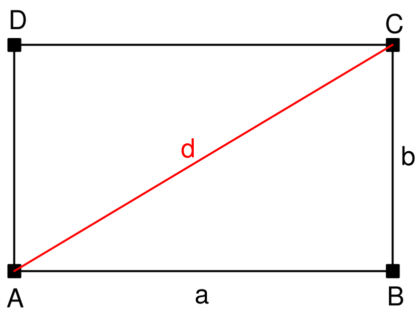
$d^2 = 2a^2$

$d = \sqrt{2a^2}$

$d = a\sqrt{2}$ $\qquad d = 5 \cdot \sqrt{2} = 7{,}1\,\text{cm}$

Aufgabe:

a.) Zeichne ein Rechteck mit der Länge a = 5 cm und der Breite b = 3 cm.
b.) Berechne die Länge der Diagonalen d.
c.) Entwickle eine Formel zur Berechnung dieser Diagonallänge. Benutze dazu nur die Buchstaben a, b und d.



zu b.)

$d^2 = a^2 + b^2$

$d^2 = 5^2 + 3^2$

$d^2 = 34$

$d = 5{,}8\text{ cm}$

zu c.)

$d^2 = a^2 + b^2$

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

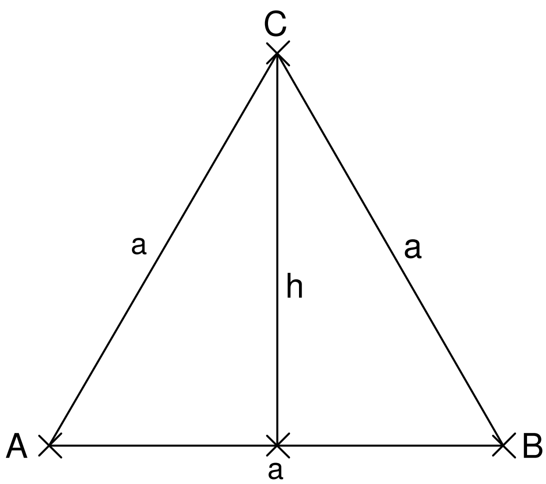
$d = \sqrt{5^2 + 3^2}$ $\qquad d = \sqrt{34} = 5{,}8\text{ cm}$

Pythagoras im gleichseitigen Dreieck

Es folgt eine Anwendungsaufgabe zum Satz des Pythagoras. Wenn alle Teile des Arbeitsblattes ausgefüllt sind, klebe es bitte ins Merkheft ein!

1.) Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit a = b = c = 6 cm und eine Höhe h.

- a.) Berechne die Länge der Höhe. Anleitung: Suche ein rechtwinkliges Dreieck, das mit der Höhe h in Verbindung steht. Zwei Stücke dieses rechtwinkligen Dreiecks muss man kennen, um die 3. Seite berechnen zu können.
- b.) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.
- c.) Bestimme eine Formel, mit der man die Höhe in einem beliebigen gleichseitigen Dreieck berechnen kann. Benutze dazu nur die Buchstaben a und h.
- d.) Bestimme eine Formel, mit der man die Fläche in einem beliebigen gleichseitigen Dreieck berechnen kann. Benutze dazu nur die Buchstaben a und h.



a.) <u>Berechnen der Länge der Höhe h:</u>

b.) <u>Berechnen des Flächeninhalts A:</u>

c.) <u>Formel für die Höhe h:</u>

d.) <u>Formel für den Flächeninhalt A:</u>

Pythagoras im gleichseitigen Dreieck (Lösung)

Es folgt eine Anwendungsaufgabe zum Satz des Pythagoras. Wenn alle Teile des Arbeitsblattes ausgefüllt sind, klebe es bitte ins Merkheft ein!

1.) Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit a = b = c = 6 cm und eine Höhe h.

a.) Berechne die Länge der Höhe. Anleitung: Suche ein rechtwinkliges Dreieck, das mit der Höhe h in Verbindung steht. Zwei Stücke dieses rechtwinkligen Dreiecks muss man kennen, um die 3. Seite berechnen zu können.
b.) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.
c.) Bestimme eine Formel, mit der man die Höhe in einem beliebigen gleichseitigen Dreieck berechnen kann. Benutze dazu nur die Buchstaben a und h.
d.) Bestimme eine Formel, mit der man die Fläche in einem beliebigen gleichseitigen Dreieck berechnen kann. Benutze dazu nur die Buchstaben a und h.

b.) Berechnen der Länge der Höhe h:

$$h^2 = 6^2 - 3^2$$

$$h^2 = 27$$

$$h = 5{,}2\ \text{cm}$$

b.) Berechnen des Flächeninhalts A:

$$A = \frac{6 \cdot 5{,}2}{2}$$

$$A = 15{,}6\ \text{cm}^2$$

---

c.) Formel für die Höhe h:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$$

$$a = 10\ \text{cm} \Rightarrow h = 8{,}7\ \text{cm} \Rightarrow A = 43{,}3\ \text{cm}^2$$

$$a = 15\ \text{cm} \Rightarrow h = 13\ \text{cm} \Rightarrow A = 97{,}43\ \text{cm}^2$$

d.) Formel für den Flächeninhalt A:

$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

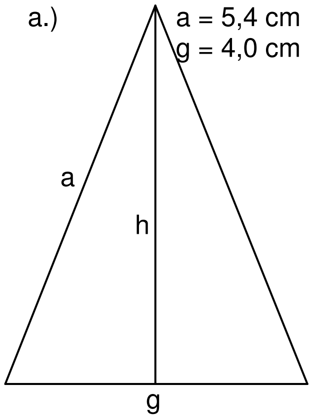
$$A = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2}$$

$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

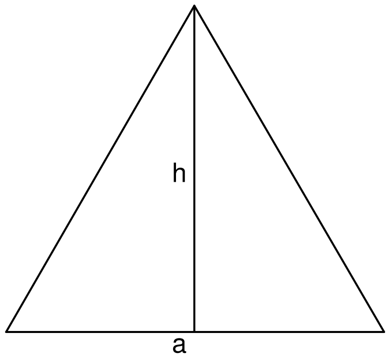
Pythagoras an Dreiecken und Vierecken

1.) Bestimme den Flächeninhalt (A) und Umfang (u) der folgenden geometrischen Figuren:

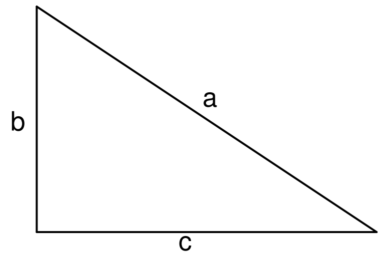
a.) a = 5,4 cm
g = 4,0 cm



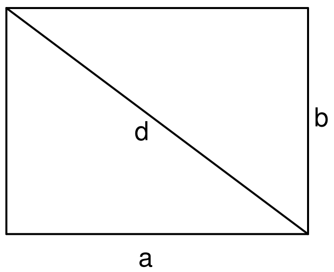
b.) a = 5 cm



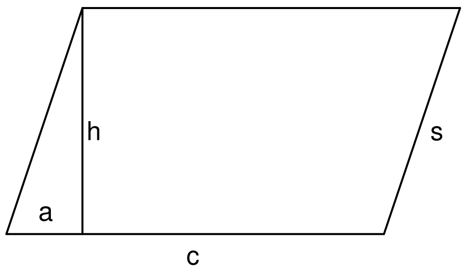
c.) a = 5,4 cm
c = 4,5 cm



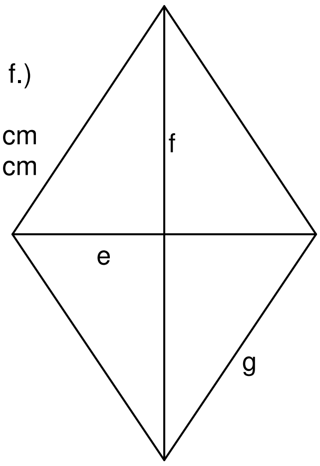
d.) d = 5,0 cm
b = 3,0 cm



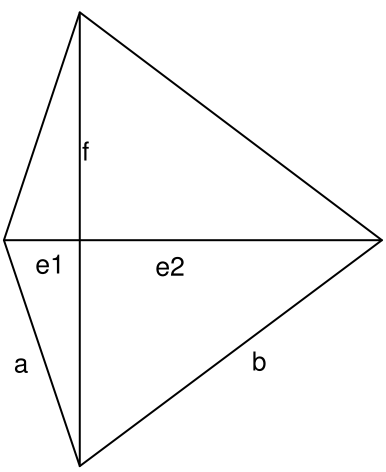
e.) h = 3,0 cm
c = 5,0 cm
a = 1,0 cm



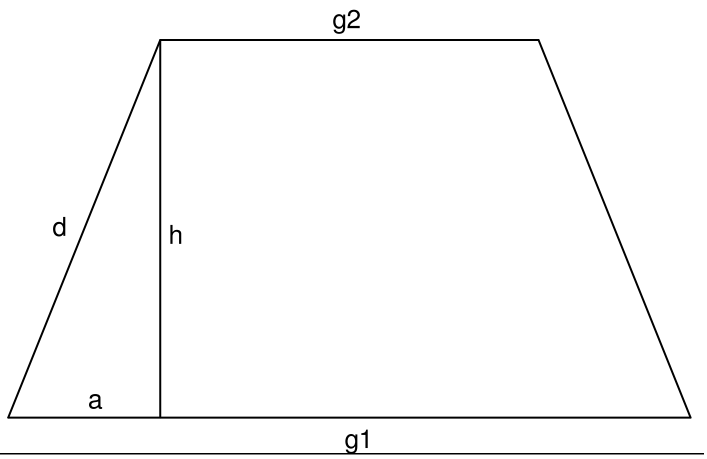
f.) g = 3,6 cm
f = 6,0 cm



g.) a = 3,2 cm
b = 5,0 cm
f = 6,0 cm



h.) g1 = 9,0 cm
g2 = 5,0 cm
d = 5,4 cm



2.) Jede der oben abgebildeten Flächen sei die Grundfläche eines Prismas mit der Höhe 10 cm. Berechne das Volumen (V) (in Liter!) und die Oberfläche (O) dieser Prismen.

3.) Wie hoch müsste das Prisma aus Aufgabe h.) sein, wenn es genau 0,5 Liter fassen soll?

Pythagoras an Drei- und Vierecken (Lösung)

zu a.)

$u = 2 \cdot 5{,}4 + 4$	$h^2 = a^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2$	$A = \frac{g \cdot h}{2}$	$V = G \cdot h_R$	$O = 2 \cdot G + M$
$u = 14{,}8\ cm$	$h^2 = 5{,}4^2 - 2^2$	$A = \frac{4 \cdot 5}{2}$	$V = 10 \cdot 10$	$O = 2 \cdot 10 + 14{,}8 \cdot 10$
	$h = 5{,}0\ cm$	$A = 10\ cm^2$	$V = 100\ cm^3$	$O = 20 + 148$
			$V = 0{,}1\ l$	$O = 168\ cm^2$

zu b.)

$u = 3 \cdot 5$	$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$A = \frac{g \cdot h}{2}$	$V = G \cdot h_R$	$O = 2 \cdot G + M$
$u = 15{,}0\ cm$	$h^2 = 5^2 - 2{,}5^2$	$A = \frac{5 \cdot 4{,}3}{2}$	$V = 10{,}75 \cdot 10$	$O = 2 \cdot 10{,}75 + 15 \cdot 10$
	$h = 4{,}3\ cm$	$A = 10{,}75\ cm^2$	$V = 107{,}5\ cm^3$	$O = 21{,}5 + 150$
			$V = 0{,}108\ l$	$O = 171{,}5\ cm^2$

zu c.)

$u = 5{,}4 + 4{,}5 + 3{,}0$	$b^2 = a^2 - c^2$	$A = \frac{c \cdot b}{2}$	$V = G \cdot h_R$	$O = 2 \cdot G + M$
$u = 12{,}9\ cm$	$b^2 = 5{,}4^2 - 4{,}5^2$	$A = \frac{4{,}5 \cdot 3}{2}$	$V = 6{,}75 \cdot 10$	$O = 2 \cdot 6{,}75 + 12{,}9 \cdot 10$
	$b = 3{,}0\ cm$	$A = 6{,}75\ cm^2$	$V = 67{,}5\ cm^3$	$O = 13{,}5 + 129$
			$V = 0{,}675\ l$	$O = 142{,}5\ cm^2$

zu d.)

$u = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3$	$a^2 = d^2 - b^2$	$A = a \cdot b$	$V = G \cdot h_R$	$O = 2 \cdot G + M$
$u = 14{,}0\ cm$	$a^2 = 5^2 - 3^2$	$A = 4 \cdot 3$	$V = 12 \cdot 10$	$O = 2 \cdot 12 + 14 \cdot 10$
	$a = 4{,}0\ cm$	$A = 12{,}0\ cm^2$	$V = 120\ cm^3$	$O = 24 + 140$
			$V = 0{,}12\ l$	$O = 164\ cm^2$

zu e.)

$u = 2 \cdot 3{,}2 + 2 \cdot 5$	$s^2 = h^2 + a^2$	$A = g \cdot h$	$V = G \cdot h_R$	$O = 2 \cdot G + M$
$u = 16{,}4\ cm$	$s^2 = 3^2 + 1^2$	$A = 6 \cdot 3$	$V = 18 \cdot 10$	$O = 2 \cdot 18 + 16{,}4 \cdot 10$
	$s = 3{,}2\ cm$	$A = 18{,}0\ cm^2$	$V = 180\ cm^3$	$O = 36 + 164$
			$V = 0{,}18\ l$	$O = 200\ cm^2$

zu f.)

$u = 4 \cdot 3{,}6$	$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = g^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2$	$A = \frac{e \cdot f}{2}$	$V = G \cdot h_R$	$O = 2 \cdot G + M$
$u = 14{,}4\ cm$	$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = 3{,}6^2 - 3^2$	$A = \frac{4 \cdot 6}{2}$	$V = 12 \cdot 10$	$O = 2 \cdot 12 + 14{,}4 \cdot 10$
	$\frac{e}{2} = 2{,}0\ cm$	$A = 12{,}0\ cm^2$	$V = 120\ cm^3$	$O = 24 + 144$
	$e = 4{,}0\ cm$		$V = 0{,}12\ l$	$O = 168\ cm^2$

zu g.)

$u = 2\cdot(3{,}2+5)$	$e_1^{\ 2} = b^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2$	$e_2^{\ 2} = a^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2$	$A = \frac{e\cdot f}{2}$	$V = G\cdot h_R$	$O = 2\cdot G + M$
$u = 16{,}4\ cm$	$e_1^{\ 2} = 5^2 - 3^2$	$e_2^{\ 2} = 3{,}2^2 - 3^2$	$A = \frac{5{,}1\cdot 6}{2}$	$V = 15{,}3\cdot 10$	$O = 2\cdot 15{,}3 + 16{,}4\cdot 10$
	$e_1 = 4{,}0\ cm$	$e_2 = 1{,}1\ cm$	$A = 15{,}3\ cm^2$	$V = 153\ cm^3$	$O = 30{,}6 + 164$
	$e = 4 + 1{,}1 = 5{,}1\ cm$			$V = 0{,}153\ l$	$O = 194{,}6\ cm^2$

zu h.)

$u = 2\cdot 5{,}4 + 9 + 5$	$a = \left(\frac{g_1 - g_2}{2}\right)$	$h^2 = d^2 - a^2$	$A = \frac{(g_1 + g_2)\cdot h}{2}$	$V = G\cdot h_R$	$O = 2\cdot G + M$
$u = 24{,}8\ cm$	$a = \frac{9-5}{2}$	$h^2 = 5{,}4^2 - 2^2$	$A = \frac{(9+5)\cdot 5}{2}$	$V = 35\cdot 10$	$O = 2\cdot 35 + 24{,}8\cdot 10$
	$a = 2{,}0\ cm$	$h = 5{,}0\ cm$	$A = 35{,}0\ cm^2$	$V = 350\ cm^3$	$O = 70 + 248$
				$V = 0{,}35\ l$	$O = 318\ cm^2$

zu 3.)

$$V = G\cdot h_R$$

$$h_R = \frac{V}{G}$$

$$h_R = \frac{500}{35} = 14{,}3\ cm$$

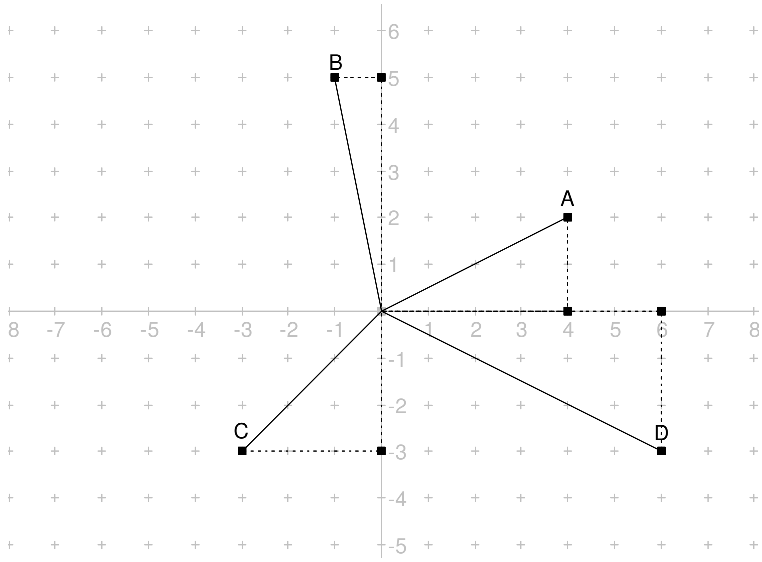
Pythagoras im Koordinatensystem

Aufgabe:

Trage in ein Koordinatensystem folgende Punkte ein: A(4/2) ; B(-1/5) ; C (-3/-3) ; D (6/-3)

a.) Welche Entfernung besitzen diese Punkte vom Koordinatenursprung?
b.) Berechne die Längen der Strecken: AC und BD
c.) Berechne den Umfang (u) des Vierecks ABCD.
d.) Berechne den Flächeninhalt (A) des Vierecks ABCD.

zu a.)



$A(4/2) \Rightarrow (0/0):$
$a^2 = 4^2 + 2^2$
$a = \sqrt{20}$
$a = 4{,}5\text{ cm}$

$B(-1/5) \Rightarrow (0/0):$
$a^2 = (-1)^2 + 5^2$
$a = \sqrt{26}$
$a = 5{,}1\text{ cm}$

$C(-3/-3) \Rightarrow (0/0):$
$a^2 = (-3)^2 + (-3)^2$
$a = \sqrt{18}$
$a = 4{,}2\text{ cm}$

$D(6/-3) \Rightarrow (0/0):$
$a^2 = 6^2 + (-3)^2$
$a = \sqrt{45}$
$a = 6{,}7\text{ cm}$

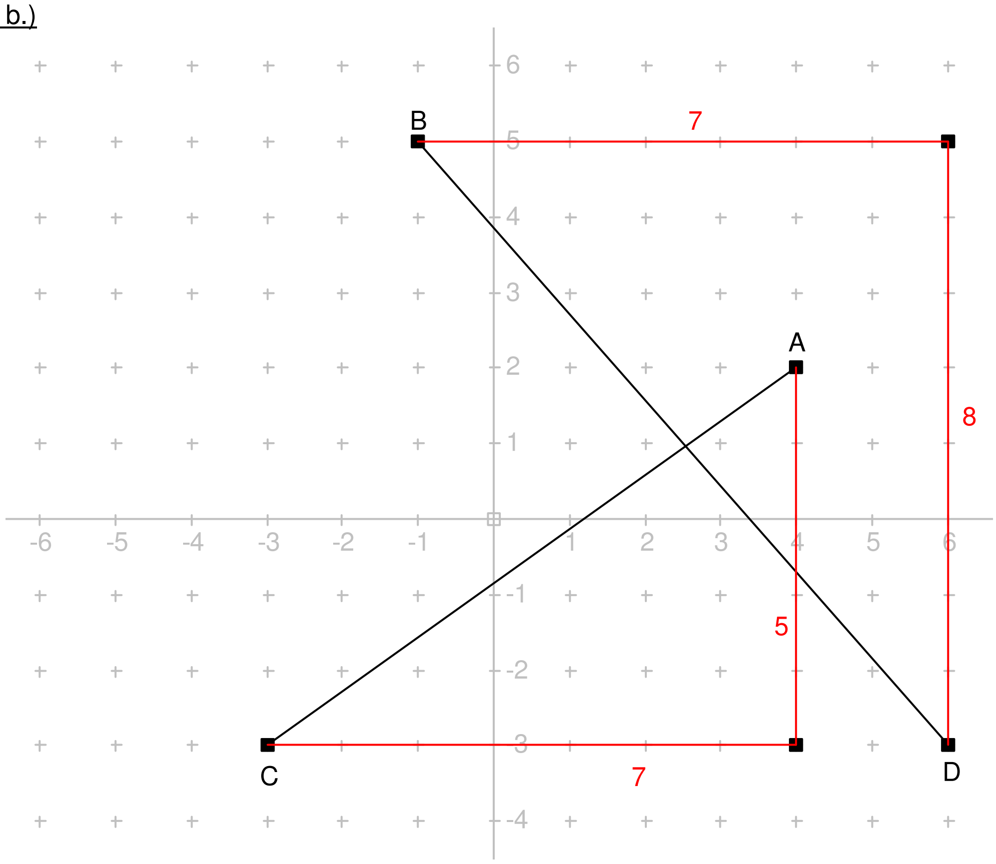
MERKE:

Berechnung des Abstandes (a) eines Punktes P (x/y) vom Nullpunkt (0/0):

Punkt $A(4/2)$: $a^2 = x^2 + y^2$
$a^2 = 4^2 + 2^2$
$a = \sqrt{16+4}$
$a = \sqrt{20}$
$a = 4{,}5\text{ cm}$

allgemein: Punkt $A(x/y)$: $a^2 = x^2 + y^2$
$a = \sqrt{x^2 + y^2}$

zu b.)



$AC^2 = 5^2 + 7^2$

$AC = \sqrt{74}$

$AC = 8{,}6$ cm

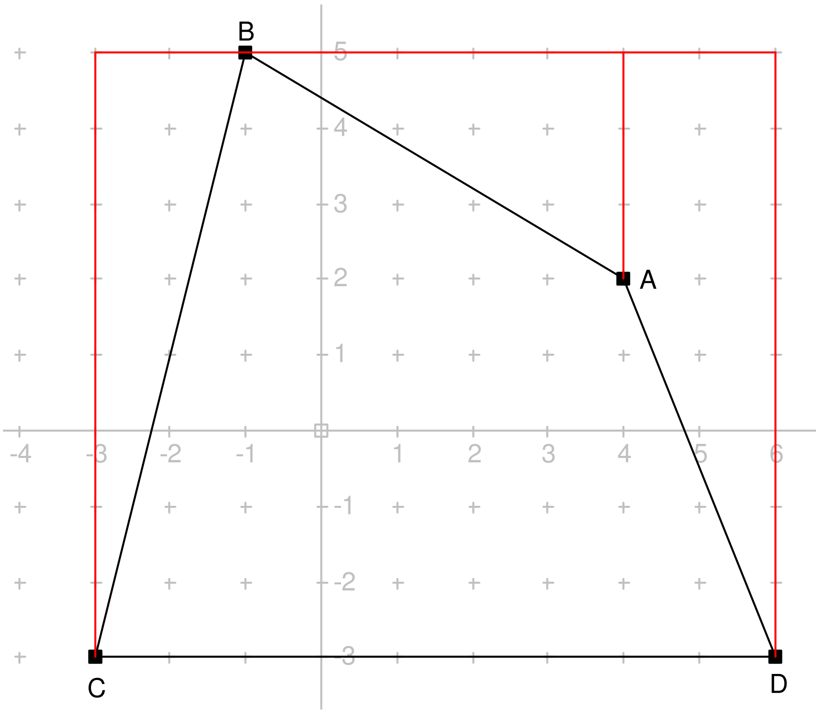
$BD^2 = 7^2 + 8^2$

$BD = \sqrt{113}$

$BD = 10{,}6$ cm

---

zu c.)



$AB^2 = 5^2 + 3^2$
$AB = \sqrt{34}$
$AB = 5{,}8\text{ cm}$

$BC^2 = 2^2 + 8^2$
$BC = \sqrt{68}$
$BC = 8{,}2\text{ cm}$

$u = AB + BC + CD + DA$
$u = 5{,}8 + 8{,}2 + 9 + 5{,}4$
$u = 28{,}4\text{ cm}$

$CD = 3 + 6$
$CD = 9\text{ cm}$

$DA^2 = 2^2 + 5^2$
$DA = \sqrt{29}$
$DA = 5{,}4\text{ cm}$

---

zu d.)

$$A_{D1} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8\text{ cm}^2$$
$$A_{D2} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5\text{ cm}^2$$
$$A_T = \frac{(g_1 + g_2) \cdot h}{2} = \frac{(8+3) \cdot 2}{2} = 11\text{ cm}^2$$

$$A = A_R - (A_{D1} + A_{D2} + A_T)$$
$$A = 8 \cdot 9 - (8 + 5 + 11) = 48\text{ cm}^2$$

MERKE:

Berechnung des Abstandes (a) von zwei Punkten P1(x1/y1) und P2(x2/y2):

$P_1(-4/8)$
$P_2(5/-3)$

$a^2 = 9^2 + 11^2$
$a = \sqrt{9^2 + 11^2}$
$a = 14{,}2\text{ cm}$

$P_1(x_1/y_1)$
$P_2(x_2/y_2)$

$a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$
$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$a^2 = (-4-5)^2 + (8-(-3))^2$
$a^2 = (-9)^2 + 11^2$
$a = \sqrt{81+121} = 14{,}2\text{ cm}$

$$\boxed{a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

Aufgabe dazu:

Gegeben sind folgende Punkte im Koordinatensystem: A(-25/-50) ; B(20/-45) ; C(30/35) ; D(-35/40)

a.) Berechne die Längen der Strecken AC und BD.
b.) Berechne den Umfang des Vierecks ABCD.

zu a.)

$A(-25/-50)$
$C(30/35)$

$e^2 = (-25-30)^2 + (-50-35)^2$
$e = \sqrt{(-55)^2 + (-85)^2}$
$e = 101{,}2\text{ cm}$

$B(20/-45)$
$D(-35/40)$

$f^2 = (20-(-35))^2 + (-45-40)^2$
$f = \sqrt{55^2 + (-85)^2}$
$f = 101{,}2\text{ cm}$

---

zu b.)

$A(-25/-50)$ $B(20/-45)$	$a^2 = (-25-20)^2 + (-50-(-45))^2$ $a = \sqrt{(-45)^2 + (-5)^2}$ $a = 45{,}3\text{ cm}$	$B(20/-45)$ $C(30/35)$	$b^2 = (20-30)^2 + (-45-35)^2$ $b = \sqrt{(-10)^2 + (-80)^2}$ $b = 80{,}6\text{ cm}$
$B(20/-45)$ $C(30/35)$	$c^2 = (20-30)^2 + (-45-35)^2$ $c = \sqrt{(-10)^2 + (-80)^2}$ $c = 80{,}6\text{ cm}$	$D(-35/40)$ $A(-25/-50)$	$d^2 = (-35-(-25))^2 + (40-(-50))^2$ $d = \sqrt{(-10)^2 + 90^2}$ $d = 90{,}6\text{ cm}$

$u = a + b + c + d$

$u = 45{,}3 + 80{,}6 + 80{,}6 + 90{,}6$

$u = 297{,}1\text{ cm}$

Pythagoras am Kreis

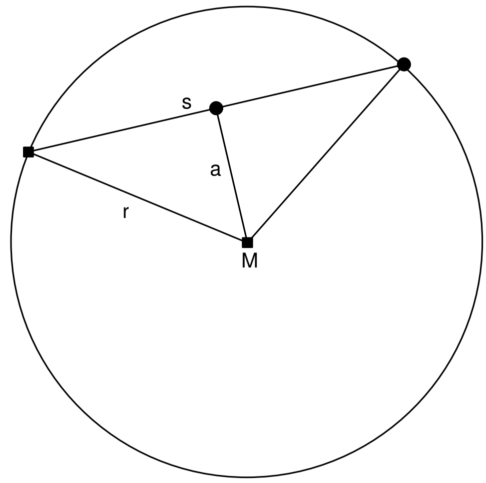
1.) Zeichne in einen Kreis mit dem Radius r = 4 cm eine Sehne(s) mit der Länge 6,5 cm.

Welchen Abstand (a) besitzt diese Sehne vom Kreismittelpunkt (M)?

$$a^2 = r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$a^2 = 4^2 - 3{,}25^2$$

$$a = 2{,}3\ \text{cm}$$



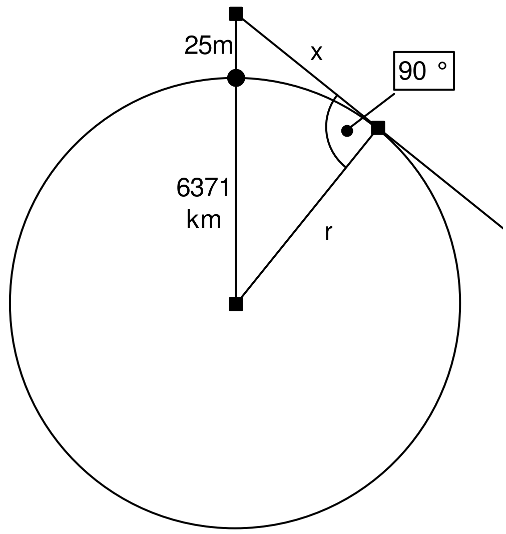
2.) Ein Kapitän befindet sich auf einem Kreuzfahrschiff 25 Meter oberhalb der Wasseroberfläche in seinem Kommandostand.

Wie weit kann er bei klarer Sicht bis zum Horizont sehen?

$$x^2 = (6371\ \text{km} + 25\ \text{m})^2 - 6371^2$$

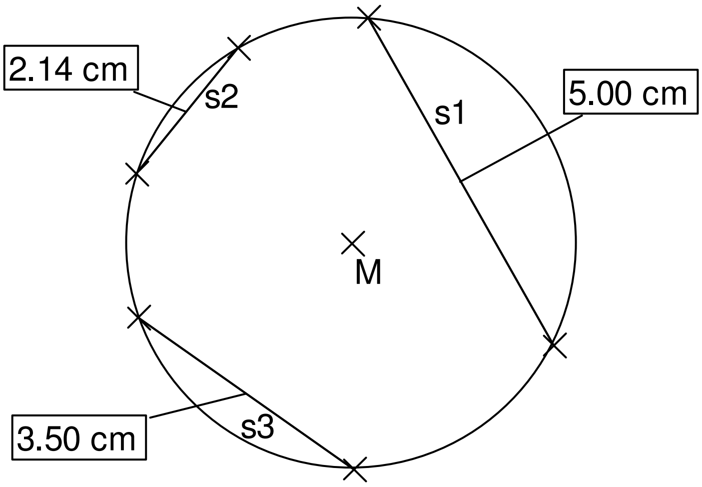
$$x^2 = 6371{,}025^2 - 6371^2$$

$$x = 17{,}848\ \text{km}$$



Pythagoras am Kreis

1.) In einen Kreis mit dem Radius r = 3 cm sind drei Sehnen (s_1, s_2 und s_3) gezeichnet. Bestimme mit Hilfe des Satzes von Pythagoras den Abstand (a) der Sehnen vom Kreismittelpunkt (M).

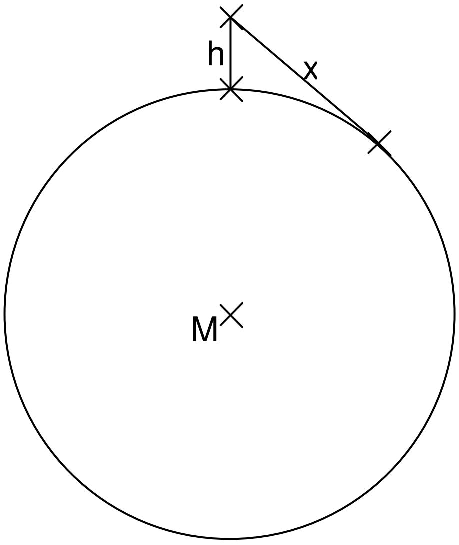


2.) In einen Kreis mit r = 6,5 cm soll in 2 cm Abstand (a) vom Kreismittelpunkt eine Sehne (s) gezeichnet werden. Welche Länge hat die Sehne?

3.) In einen Kreis soll eine Sehne (s) mit der Länge 7,5 cm gezeichnet werden, die 3,5 cm Abstand (a) vom Kreismittelpunkt hat. Welchen Radius (r) muss der Kreis haben?

4.) Da die Erde fast eine Kugel ist (r = 6371 km), ist auch auf dem Meer die Sichtweite begrenzt. Sie hängt dabei von der Augenhöhe über dem Wasser ab.

Wie groß ist die Sichtweite (x) für einen Beobachter in einem Segelboot auf freier See, dessen Augen sich 3 Meter (h) über dem Wasserspiegel befinden?



5.) Auf dem höchsten Leuchtturm der Welt bei Yokohama in Japan befindet sich das Leuchtfeuer in 100 m Höhe (h). Aus welcher Entfernung (x) kann das Leuchtfeuer gesehen werden?

6.) Von einem Beobachtungspunkt aus beträgt die Sichtweite (x) auf das Meer 10 km. Wie hoch liegt der Beobachtungspunkt über dem Meeresspiegel (h)?

7.) Wie groß wäre die theoretische Sichtweite (x) von der Wasserkuppe (h = 960 m) auf das Meer?

Pythagoras am Kreis (Lösungen)

zu 1.)

$$a_1^2 = r^2 - \left(\frac{s_1}{2}\right)^2$$
$$a_1^2 = 3^2 - 2{,}5^2$$
$$a_1 = 1{,}65 \text{ cm}$$

$$a_2^2 = r^2 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2$$
$$a_2^2 = 3^2 - 1{,}07^2$$
$$a_2 = 2{,}8 \text{ cm}$$

$$a_3^2 = r^2 - \left(\frac{s_3}{2}\right)^2$$
$$a_3^2 = 3^2 - 1{,}75^2$$
$$a_3 = 2{,}4 \text{ cm}$$

---

zu 2.)

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2 - a^2$$
$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 6{,}5^2 - 2^2$$
$$\left(\frac{s}{2}\right) = 6{,}2$$
$$s = 12{,}4 \text{ cm}$$

zu 3.)

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + a^2$$
$$r^2 = 3{,}75^2 + 3{,}5^2$$
$$r = 5{,}1 \text{ cm}$$

---

zu 4.)

$$x^2 = (r+h)^2 - r^2$$
$$x^2 = (6371 + 0{,}003)^2 - 6371^2$$
$$x^2 = 6371{,}003^2 - 6371^2$$
$$x = 6{,}18 \text{ km}$$

zu 5.)

$$x^2 = (r+h)^2 - r^2$$
$$x^2 = (6371 + 0{,}100)^2 - 6371^2$$
$$x^2 = 6371{,}1^2 - 6371^2$$
$$x = 35{,}696 \text{ km}$$

---

zu 6.)

$$(r+h)^2 = x^2 + r^2$$
$$(6371+h)^2 = 10^2 + 6371^2$$
$$(6371+h)^2 = 40589741$$
$$6371 + h = 6371{,}007848$$
$$h = 7{,}848 \text{ m}$$

zu 7.)

$$x^2 = (r+h)^2 - r^2$$
$$x^2 = (6371 + 0{,}960)^2 - 6371^2$$
$$x^2 = 6371{,}960^2 - 6371^2$$
$$x = 110{,}604 \text{ km}$$

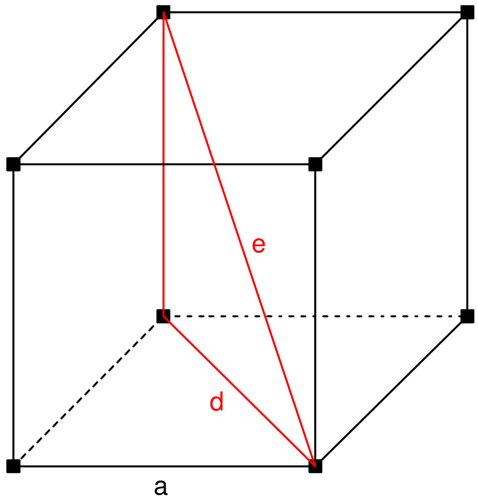
Pythagoras in Körpern

Aufgabe:

Passt ein 2,55 m langer Stab in eine würfelförmige Kiste mit der Kantenlänge a = 1,5 m?

$$d^2 = a^2 + a^2$$
$$d^2 = 1{,}5^2 + 1{,}5^2$$
$$d = \sqrt{4{,}5}$$
$$d = 2{,}12\ \text{m}$$

$$e^2 = d^2 + a^2$$
$$e^2 = 2{,}12^2 + 1{,}5^2$$
$$e = \sqrt{6{,}7444}$$
$$e = 2{,}60\ \text{m}$$



Der Stab passt in die würfelförmige Kiste!

Formel zur Berechnung einer Raumdiagonalen (e) eines Würfels mit der Kantenlänge a:

$$d^2 = a^2 + a^2$$

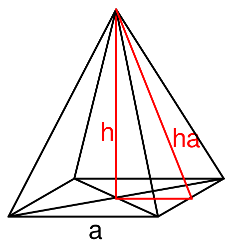
$$e^2 = d^2 + a^2$$
$$e^2 = a^2 + a^2 + a^2$$
$$e^2 = 3a^2$$
$$e = \sqrt{3a^2}$$
$$e = a \cdot \sqrt{3}$$

Berechnung der Quaderdiagonalen (e) im Klassenraum mit Maßband:

Aufgabe:

Ein 2-Mann Zelt hat die Form einer quadratischen Pyramide mit der Kantenlänge a = 2,20 m und einer Höhe (h) von 2,00 m.
Wie viel m^2 Zeltplane benötigt man für dieses Zelt mit Boden?

$$ha^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$ha^2 = 2^2 + 1{,}1^2$$
$$ha = \sqrt{5{,}21}$$
$$ha = 2{,}28\ \text{m}$$



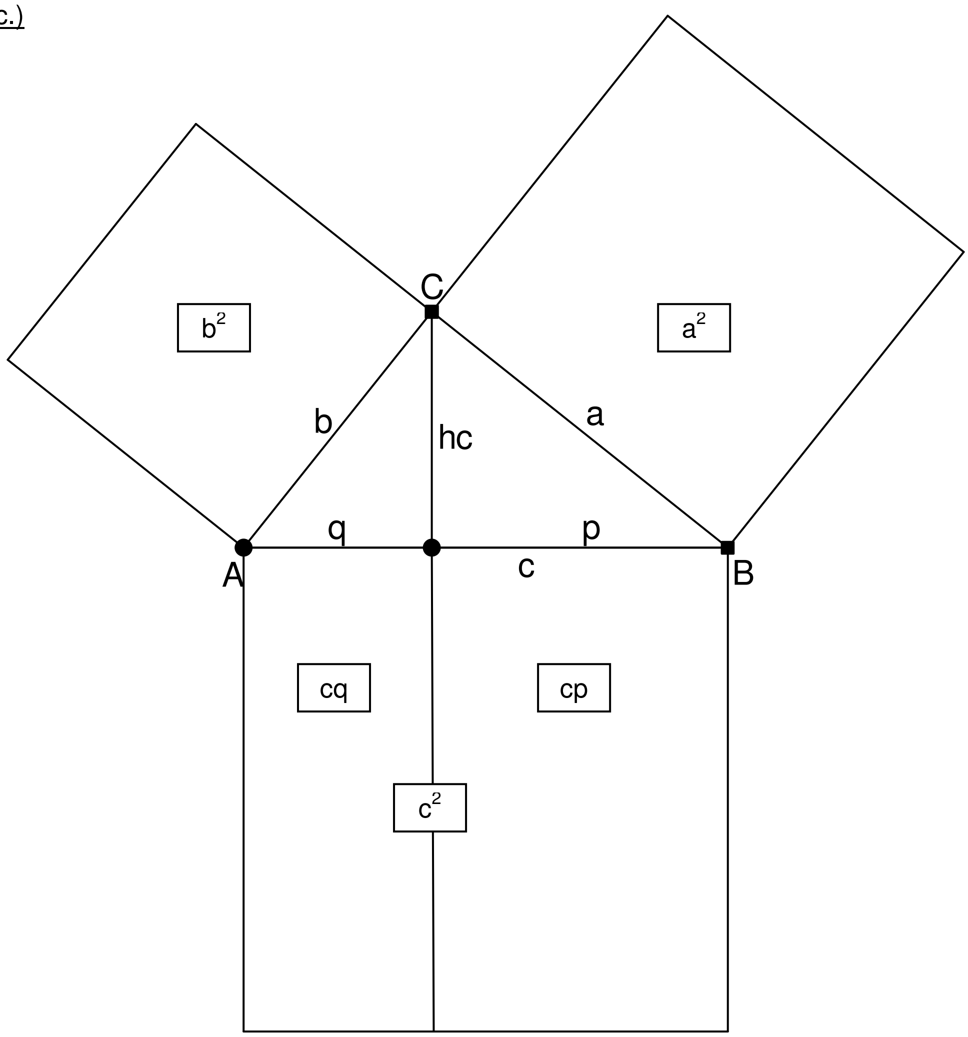
$$O = a^2 + \frac{4 \cdot a \cdot ha}{2}$$
$$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot ha$$
$$O = 2{,}2^2 + 2 \cdot 2{,}2 \cdot 2{,}28$$
$$O = 14{,}87\ \text{m}^2$$

Kathetensätze am rechtwinkligen Dreieck

Aufgabe: Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus: $a = 5$ cm, $b = 4$cm, $\gamma = 90^o$.

a.) Zeichne die Quadrate über a, b und c.
b.) Zeichne die Höhe h_c ein und bestimme die Abschnitte q und p.
c.) Verlängere die Höhe h_c bis sie das Quadrat über c in zwei Rechtecke zerteilt.
d.) Notiere für alle Flächen den Flächeninhalt mit Hilfe der Buchstaben.
e.) Bestimme für alle Flächen den Flächeninhalt mit Zahlen.

zu a. b. c.)



zu d.)

Fläche des Dreiecks: $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ oder $A = \frac{a \cdot b}{2}$ $\quad A = \frac{6{,}4 \cdot 3{,}1}{2} = 9{,}92\ cm^2$ oder $A = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10\ cm^2$

Fläche des Quadrats über der Seite a: $A = a \cdot a = a^2$ $\quad A = 5 \cdot 5 = 25\ cm^2$

Fläche des Quadrats über der Seite b: $A = b \cdot b = b^2$ $\quad A = 4 \cdot 4 = 16\ cm^2$

Fläche des Quadrats über der Seite c: $A = c \cdot c = c^2$ $\quad A = 6{,}4 \cdot 6{,}4 = 40{,}96\ cm^2$

Fläche des linken Rechtecks: $A = c \cdot q$ $\quad A = 6{,}4 \cdot 2{,}5 = 16\ cm^2$

Fläche des rechten Rechtecks: $A = c \cdot p$ $\quad A = 6{,}4 \cdot 3{,}9 = 24{,}96\ cm^2$

Länge der Seite c: 6,4 cm
Länge der Höhe h_c: 3,1 cm
Länge des Hypotenusenabschnitts q: 2,5 cm
Länge des Hypotenusenabschnitts p: 3,9 cm

Offensichtlich gilt in einem rechtwinkligen Dreieck:

1.) Das Quadrat über der Kathete a ist flächengleich zu dem Rechteck aus der Hypotenuse c und dem Hypotenusenabschnitt p.

1. Kathetensatz des Euklid: $a^2 = c \cdot p$

2.) Das Quadrat über der Kathete b ist flächengleich zu dem Rechteck aus der Hypotenuse c und dem Hypotenusenabschnitt q.

2. Kathetensatz des Euklid: $b^2 = c \cdot q$

Beweis:

$a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$

$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q$

$a^2 + b^2 = c \cdot (p + q)$

$a^2 + b^2 = c \cdot c$

$a^2 + b^2 = c^2$

Anwendung:
In einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) ist a = 4,5 cm und p = 3 cm lang.
Berechne b, c, q, h_c, A und u.

$a^2 = c \cdot p$	$b^2 = c^2 - a^2$	$q = c - p$	$hc^2 = a^2 - p^2$
$c = \frac{a^2}{p}$	$b = \sqrt{6{,}8^2 - 4{,}5^2}$	$q = 6{,}8 - 3$	$hc = \sqrt{4{,}5^2 - 3^2}$
$c = \frac{20{,}25}{3}$	$b = 5{,}1\ \text{cm}$	$q = 3{,}8\ \text{cm}$	$hc = 3{,}4\ \text{cm}$
$c = 6{,}8\ \text{cm}$			

$A = \frac{c \cdot hc}{2}$	$A = \frac{a \cdot b}{2}$	$u = a + b + c$
$A = \frac{6{,}8 \cdot 3{,}4}{2}$	$A = \frac{4{,}5 \cdot 5{,}1}{2}$	$u = 4{,}5 + 5{,}1 + 6{,}8$
$A = 11{,}56\ \text{cm}^2$	$A = 11{,}48\ \text{cm}^2$	$u = 16{,}4\ \text{cm}$

Der Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck

Der Satz des Pythagoras lautet:

$$a^2 \quad + \quad b^2 \quad = \quad c^2$$

Diese Quadrate können nach Pythagoras auch durch folgende Ausdrücke ersetzt werden:

$$h_c{}^2 + p^2 \quad + \quad h_c{}^2 + q^2 \quad = \quad (p+q)^2$$

Durch weiteres ausrechnen ergibt sich:

$$\begin{array}{llllll} h_c{}^2 + p^2 & + & h_c{}^2 + q^2 & = & p^2 + 2pq + q^2 \\ 2h_c{}^2 & + & p^2 + q^2 & = & p^2 + 2pq + q^2 \\ & & 2h_c{}^2 & = & 2pq \\ & & h_c{}^2 & = & pq \end{array}$$

Damit ist ein weiterer wichtiger Satz im rechtwinkligen Dreieck gefunden, der so genannte Höhensatz:

MERKE:

Höhensatz des Euklid:

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich zu dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten p und q.

$$h_c{}^2 = p \cdot q$$

Damit stehen zur Berechnung von fehlenden Stücken in einem rechtwinkligen Dreieck folgende „Sätze“ zur Verfügung:

1.) Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

2.) Kathetensätze des Euklid: $a^2 = c \cdot p$

$b^2 = c \cdot q$

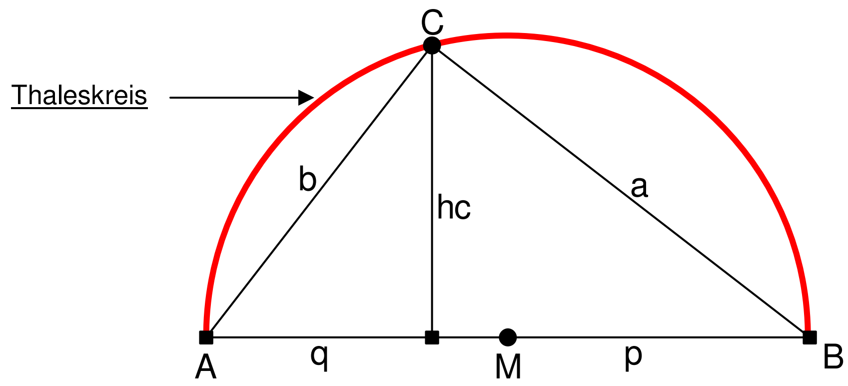
3.) Höhensatz des Euklid: $h_c{}^2 = p \cdot q$

Anwendungen:

In einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) ist gegeben: p = 5 cm ; q = 3 cm.

a.) Konstruiere das rechtwinklige Dreieck.
b.) Berechne a, b, c, h_c , u , A des Dreiecks.
c.) Das Dreieck sei Grundfläche eines Prismas. Welche Höhe muss dieses Prisma besitzen, damit es 0,5 Liter fasst?

zu a.)



zu b.)

$h_c^2 = p \cdot q$	$a^2 = h_c^2 + p^2$	$b^2 = h_c^2 + q^2$	$c = p + q$	$u = a + b + c$	$A = \frac{a \cdot b}{2}$
$h_c = \sqrt{p \cdot q}$	$a = \sqrt{h_c^2 + p^2}$	$b = \sqrt{h_c^2 + q^2}$	$c = 3 + 5$	$u = 6{,}3 + 4{,}9 + 8$	$A = \frac{6{,}3 \cdot 4{,}9}{2}$
$h_c = \sqrt{5 \cdot 3}$	$a = \sqrt{3{,}9^2 + 5^2}$	$b = \sqrt{3{,}9^2 + 3^2}$	$c = 8\ \text{cm}$	$u = 19{,}2\ \text{cm}$	$A = 15{,}44\ \text{cm}^2$
$h_c = 3{,}9\ \text{cm}$	$a = 6{,}3\ \text{cm}$	$b = 4{,}9\ \text{cm}$			

zu c.)

$$V = G \cdot h$$

$$h = \frac{V}{G}$$

$$h = \frac{500\ \text{cm}^3}{15{,}44\ \text{cm}^2} = 32{,}4\ \text{cm}$$

Flächensätze im rechtwinkligen Dreieck

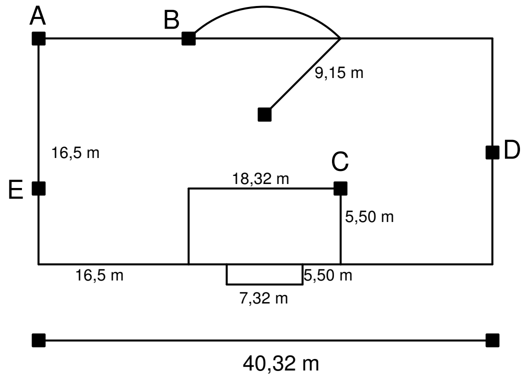
1.) Gegeben sind folgende Punkte in einem Koordinatensystem:

A(-3/4) ; B(-5/-2) ; C(0/-4) ; D(4/0) ; E(3/5)

a.) Bestimme den Umfang (u) des Fünfecks ABCDE.
b.) Bestimme den genauen Flächeninhalt (A) des Fünfecks ABCDE.

2.) Für Fußballexperten:

a.) Wie weit ist es jeweils bis zur Mitte des Tores, wenn der Spieler bei A, B, C, D oder E steht?
b.) Elfmeter: Jan schießt den Ball gegen den Pfosten in 1 m Höhe, von dort prallt der Ball direkt in die Arme des Torwarts (Fanghöhe 1,5 m). Berechne die Länge des Ballweges.



3.) Wie weit kann man von einem 120 m hohen Leuchtturm sehen? Stelle dir die Erde als Kugel vor und verwende bei der Berechnung den Erdradius r = 6350 km.

4.) Ein Klassenraum ist 7,50 m lang, 4,50 m breit und 2,50 m hoch.

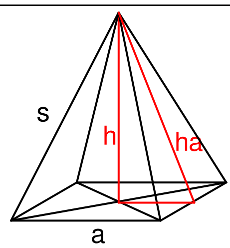
a.) Berechne das Volumen (V) des Klassenraumes.
b.) Wie lang ist die Diagonale des Bodens (d), die Diagonale der Seitenwand (e), die Diagonale der Rückwand (f)?
c.) Welche Länge besitzt die Raumdiagonale (x)?
d.) Um wie viel Prozent ist die Raumdiagonale (x) größer als die Bodendiagonale (d)?

5.) In einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) ist b = 4,5 cm und q = 3 cm.

a.) Berechne a, b, c, p, h_c, u, A des Dreiecks?
b.) Das Dreieck sei die Grundfläche (G) eines Prismas. Welche Höhe (h) muss das Prisma besitzen, damit es 0,5 Liter fasst?
c.) Berechne die Oberfläche des Prismas.

6.) Von einer quadratischen Pyramide sind gegeben: Länge der Grundseite a = 25 cm, Länge der Höhe h = 35 cm.

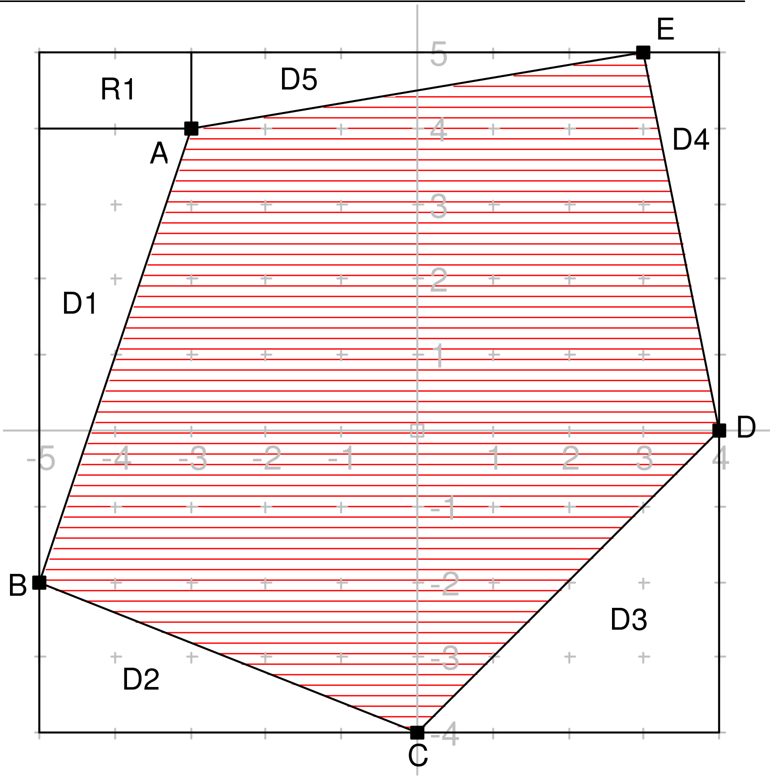
a.) Berechne die Länge der Seitenhöhe h_a und die Länge der Seitenkante s.
b.) Berechne die Oberfläche (O) der Pyramide.



7.) Die Flugbahnen zweier Flugzeuge schneiden sich rechtwinklig. Das eine Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 580 km/h in einer Höhe von 6500 m. Das andere Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 650 km/h in einer Höhe von 7300 m.

Wie weit sind die beiden Flugzeuge nach einer halben Stunde (vom Kreuzungspunkt aus gerechnet) voneinander entfernt?

Flächensätze im rechtwinkligen Dreieck (Lösungen)



zu 1.)

zu a.)

$AB^2 = 2^2 + 6^2$ $\quad$ $BC^2 = 2^2 + 5^2$

$AB = 6{,}3\ cm$ $\quad$ $BC = 5{,}4\ cm$

$CD^2 = 4^2 + 4^2$ $\quad$ $DE^2 = 1^2 + 5^2$

$CD = 5{,}7\ cm$ $\quad$ $DE = 5{,}1\ cm$

$EA^2 = 1^2 + 6^2$

$EA = 6{,}1\ cm$

$u = 6{,}3 + 5{,}4 + 5{,}7 + 5{,}1 + 6{,}1$

$u = 28{,}6\ cm$

zu b.)

$$A = Q - (D1 + D2 + D3 + D4 + D5 + R1)$$

$$A = 9 \cdot 9 - \left(\frac{6 \cdot 2}{2} + \frac{5 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{1 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 1}{2} + 2 \cdot 1 \right)$$

$$A = 81 - (6 + 5 + 8 + 2{,}5 + 3 + 2)$$

$$A = 81 - 26{,}5$$

$$A = 54{,}5\ cm^2$$

---

zu 2.) zu a.)

$AM^2 = 16{,}5^2 + (16{,}5 + 3{,}66)^2$

$AM^2 = 16{,}5^2 + 20{,}16^2$

$AM = 26{,}05\ m$

$BM^2 = 16{,}5^2 + (5{,}5 + 3{,}66)^2$

$BM^2 = 16{,}5^2 + 9{,}16^2$

$BM = 18{,}87\ m$

$CM^2 = 5{,}50^2 + (5{,}50 + 3{,}66)^2$

$CM^2 = 5{,}50^2 + 9{,}16^2$

$CM = 10{,}68\ m$

$DM^2 = 8{,}25^2 + (16{,}5 + 3{,}66)^2$

$DM^2 = 8{,}25^2 + 20{,}16^2$

$DM = 21{,}78\ m$

$EM^2 = 5{,}50^2 + (16{,}5 + 3{,}66)^2$

$EM^2 = 5{,}50^2 + 20{,}16^2$

$EM = 20{,}90\ m$

zu 2.) zu b.)

Elfmeter bis Pfosten unten:

$EPu^2 = 11^2 + 3{,}66^2$

$EPu = 11{,}59\ m$

Elfmeter bis Pfosten 1 m Höhe:

$EP1^2 = 11{,}59^2 + 1^2$

$EP1 = 11{,}63\ m$

Pfosten 1 m bis Arme:

$A^2 = 3{,}66^2 + 0{,}5^2$

$A = 3{,}69\ m$

Ballweg: $11{,}63\ m + 3{,}69\ m = 15{,}32\ m$

---

zu 3.)

$x^2 = (6350 + 0{,}120)^2 - 6350^2$

$x^2 = 6350{,}120^2 - 6350^2$

$x = 39{,}039\ \text{km}$

---

zu 4.) zu a.)

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 7{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot 2{,}5$

$V = 84{,}375\ \text{m}^3$

zu b.)

$d^2 = 7{,}5^2 + 4{,}5^2$

$d = 8{,}75\ \text{m}$

zu c.)

$x^2 = d^2 + 2{,}5^2$

$x^2 = 8{,}75^2 + 2{,}5^2$

$x = 9{,}10\ \text{m}$

zu d.)

$p = \frac{Pw \cdot 100}{G}$

$p = \frac{9{,}1 \cdot 100}{8{,}75}$

$p = 104\%$ also um 4%

---

zu 5.) zu a.)

$b^2 = c \cdot q$

$c = \frac{b^2}{q}$

$c = \frac{4{,}5^2}{3}$

$c = 6{,}8\ \text{cm}$

$p = c - q$

$p = 6{,}8 - 3$

$p = 3{,}8\ \text{cm}$

$a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = 6{,}8^2 - 4{,}5^2$

$a = 5{,}1\ \text{cm}$

${h_c}^2 = p \cdot q$

${h_c}^2 = 3{,}8 \cdot 3$

$h_c = 3{,}4\ \text{cm}$

$u = a + b + c$

$u = 5{,}1 + 4{,}5 + 6{,}8$

$u = 16{,}4\ \text{cm}$

$A = (a \cdot b) : 2$

$A = (5{,}1 \cdot 4{,}5) : 2$

$A = 11{,}48\ \text{cm}^2$

zu b.)

$V = G \cdot h$

$h = \frac{V}{G} = \frac{500\ \text{cm}^3}{11{,}48\ \text{cm}^2}$

$h = 43{,}6\ \text{cm}$

zu c.)

$O = 2 \cdot G + M$

$O = 2 \cdot 11{,}48 + 43{,}6 \cdot (5{,}1 + 4{,}5 + 6{,}8)$

$O = 22{,}96 + 43{,}6 \cdot 16{,}4$

$O = 738\ \text{cm}^2$

---

zu 6.) zu a.)

$ha^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$ha^2 = 35^2 + 12{,}5^2$

$ha = 37{,}2\ \text{cm}$

$s^2 = ha^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$s^2 = 37{,}2^2 + 12{,}5^2$

$s = 39{,}2\ \text{cm}$

zu b.)

$O = G + \frac{4 \cdot a \cdot ha}{2}$

$O = 25^2 + \frac{4 \cdot 25 \cdot 37{,}2}{2}$

$O = 625 + 1860$

$O = 2485\ \text{cm}^2$

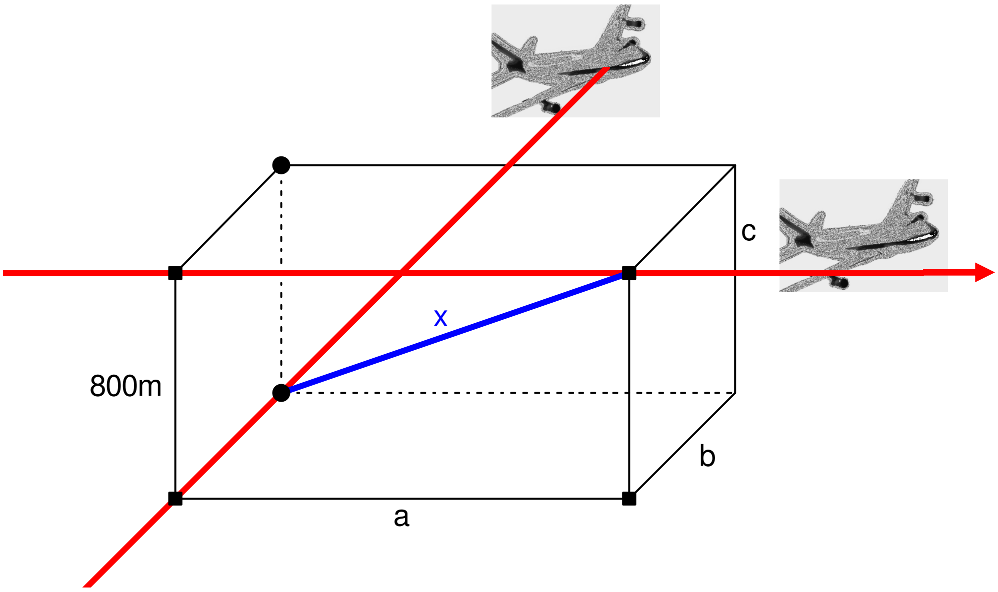
---

zu 7.)

Diese Aufgabe muss man in einem räumlichen Zusammenhang sehen. Dadurch ergibt sich ein Quader, dessen Raumdiagonale (x) berechnet werden muss.

Die Seitenlängen des Quaders ergeben sich aus:

1.) der Höhendifferenz der Flugbahnen (7300 m – 6500 m = 800 m)
→ Höhe des Quaders (c)
2.) dem zurückgelegten Weg des 1. Flugzeuges (580 km/h → 290 km in einer halben Stunde)
→ Breite des Quaders (b)
3.) dem zurückgelegten Weg des 2. Flugzeuges (650 km/h → 325 km in einer halben Stunde)
→ Länge des Quaders (a)



Flächendiagonale d :	Raumdiagonale x :
$d^2 = a^2 + c^2$	$x^2 = d^2 + 290^2$
$d^2 = 325^2 + 0{,}8^2$	$x^2 = 325{,}001^2 + 290^2$
$d = 325{,}001\,\text{km}$	$x = 435{,}575\,\text{km}$

Die beiden Flugzeuge sind also nach 30 Minuten 435,575 km voneinander entfernt!