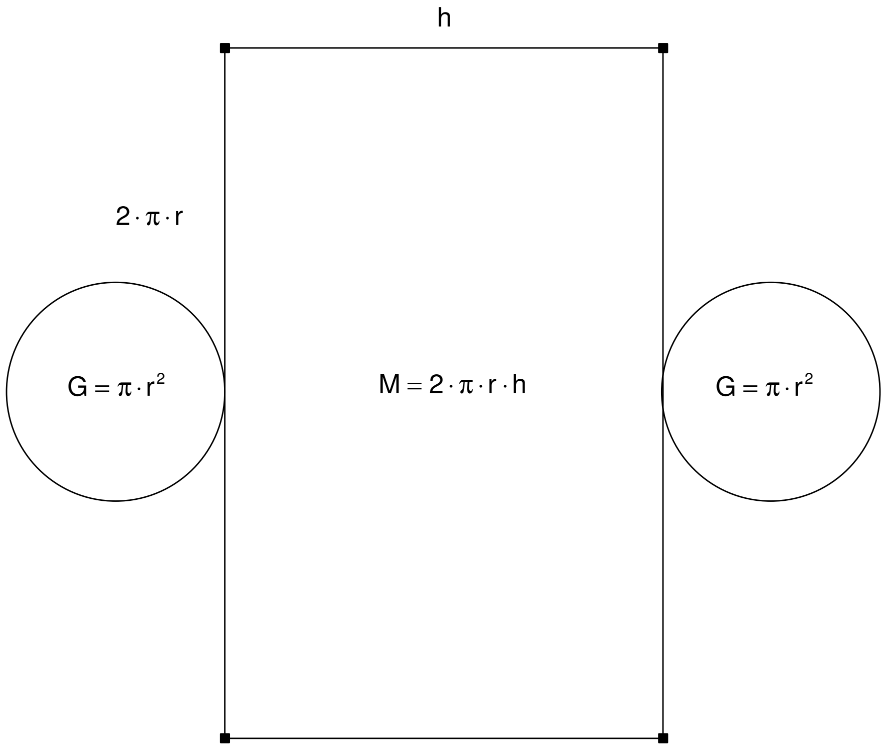
Zylinder und Kegel

Zylinder:
Jeder Zylinder hat zwei kreisförmige Grundflächen (G), die zueinander parallel sind. Die gekrümmte Seitenfläche heißt Mantelfläche (M). Der Abstand der beiden Grundflächen voneinander ist die Höhe (h) des Zylinders. Alle Flächen zusammen bilden die Oberfläche (O) des Zylinders.

Aufgabe:

Zeichne die Abwicklung eines Zylinders mit dem Radius (r) = 2 cm und der Höhe (h) = 8 cm.

a.) Wie viel cm^2 Pappe benötigt man für den Zylinder?
b.) Entwickle eine Formel für die Mantelfläche (M) und die Oberfläche (O) des Zylinders.



$$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$O = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8$$
$$O = 25{,}13 + 100{,}53$$
$$O = 125{,}66\ cm^2$$

Oberfläche des Zylinders

$$O = 2 \cdot \text{Grundfläche} + \text{Mantel}$$
$$O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh$$
$$O = 2\pi r \cdot (r + h)$$

Volumen des Zylinders

Volumen eines Prismas: $V = G \cdot h$

Volumen des Zylinders: $V = \pi r^2 \cdot h$

Wiederholung der Volumenmaße:

$$\underset{}{1\,mm^3} \xrightarrow{\cdot 1000} \underset{1\,ml}{1\,cm^3} \xrightarrow{\cdot 1000} \underset{1\,l}{1\,dm^3} \xrightarrow{\cdot 1000} 1\,m^3 \xrightarrow{\cdot 1.000.000.000} 1\,km^3$$

Aufgabe:

Bestimme das Volumen der Beispielaufgabe mit r = 2 cm und h = 8 cm.

$$V = \pi r^2 \cdot h$$
$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 8$$
$$V = 100{,}531\,cm^3$$
$$V = 0{,}101\,dm^3 = 0{,}101\,Liter$$

Das Volumen des Zylinders ist 0,101 dm^3 = 0,101 Liter.

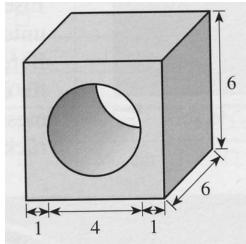
Kreisteile und Zylinder

1.) Eine zylindrische Regentonne hat einen Innendurchmesser von 60 cm und eine Höhe von 85 cm.

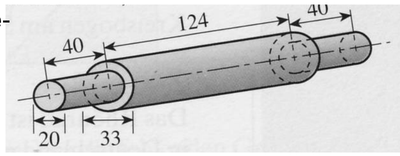
a.) Wie viel Liter Wasser (V) fasst sie?
b.) Wie hoch (h) stehen 150 Liter Regenwasser in ihr?

2.) Das abgebildete Werkstück stellt einen Quader dar, in den ein Zylinder eingefräst wurde. (Maße in Zentimeter!)

a.) Welches Volumen (V) besitzt das Werkstück?
b.) Das Werkstück soll komplett mit Farbe bestrichen werden. Wie groß ist die zu bestreichende Fläche (O)?

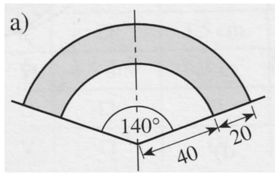


3.) Wie groß sind das Volumen (V) und die Oberfläche (O) der abgebildeten Antriebswelle (Maße in Millimeter!)?



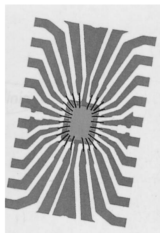
4.) Im Zuge des Straßenbaus soll eine Kurve erneuert werden. (Siehe Zeichnung rechts, Maße in Meter!).

a.) Wie groß ist die zu asphaltierende Kurvenfläche (A)?
b.) Die Kurve soll innen und außen mit Leitplanken versehen werden. Wie viele Meter Leitplanken (b) müssen angebracht werden?
c.) Der Asphalt wird mit einer 8 cm dicken Schicht in der Kurve aufgetragen. Wie viel Kubikmeter Asphalt (V) werden benötigt?



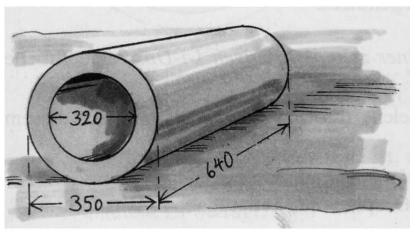
5.) Für integrierte Schaltungen in Computern werden extrem dünne Drähte verwendet. Ein solcher Draht hat einen Durchmesser von 0,01 mm.

a.) Wie viel Meter Draht (h) haben ein Volumen von 1 cm^3?
b.) Der Draht besteht aus fast reinem Gold. 1 cm^3 Gold wiegt 19,3 Gramm. Wie viel wiegt 1 Kilometer Draht (M)?



6.) Im Bild rechts ist ein Hohlzylinder aus Gusseisen dargestellt.

a.) Wie schwer ist der Hohlzylinder (M), wenn 1 cm^3 Gusseisen 7,3 Gramm wiegt?
b.) Der Hohlzylinder soll komplett mit einer Rostschutzschicht versehen werden. Wie viele cm^2 (O) müssen gestrichen werden?



Kreisteile und Zylinder (Lösungen)

zu 1.)

a.)

$V = \pi r^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot 30^2 \cdot 85$

$V = 240.331{,}838\ cm^3$

$V = 240{,}332\ dm^3 = 240{,}332\ \text{Liter}$

b.)

$V = \pi r^2 \cdot h$

$h = \frac{V}{\pi r^2}$

$h = \frac{150000}{\pi \cdot 30^2}$

$h = 53{,}05\ cm$

zu 2.)

a.)

$V = V_{Würfel} - V_{Zylinder}$

$V = 6 \cdot 6 \cdot 6 - \pi \cdot 2^2 \cdot 6$

$V = 216 - 75{,}398$

$V = 140{,}602\ cm^3$

b.)

$O = M_{Würfel} + (2 \cdot G_{Würfel} - 2 \cdot G_{Zylinder}) + M_{Zylinder}$

$O = 4 \cdot 6 \cdot 6 + (2 \cdot 6 \cdot 6 - 2 \cdot \pi \cdot 2^2) + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6$

$O = 144 + (48 - 25{,}13) + 75{,}4$

$O = 266{,}27\ cm^2$

zu 3.)

$V = 2 \cdot V_{Zylinder\ klein} + V_{Zylinder\ groß}$

$V = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 40 + \pi \cdot 16{,}5^2 \cdot 124$

$V = 2 \cdot 12566{,}37 + 106057{,}03$

$V = 131.189{,}77\ mm^3$

$O = O_{Zylinder\ groß} + 2 \cdot M_{Zylinder\ klein}$

$O = 2 \cdot \pi \cdot 16{,}5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 16{,}5 \cdot 124 + 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 40$

$O = 1710{,}6 + 12855{,}4 + 5026{,}55$

$O = 19.592{,}55\ mm^2$

zu 4.)

a.)

$A = A_{Sektor\ außen} - A_{Sektor\ innen}$

$A = \frac{\pi \cdot 60^2 \cdot 140}{360} - \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 140}{360}$

$A = 4398{,}23 - 1954{,}77$

$A = 2443{,}46\ m^2$

b.)

$b = b_{außen} + b_{innen}$

$b = \frac{\pi \cdot 60 \cdot 140}{180} + \frac{\pi \cdot 40 \cdot 140}{180}$

$b = 146{,}61 + 97{,}74$

$b = 244{,}35\ m$

c.)

$V = A_{Fahrbahn} \cdot h$

$V = 2443{,}46\ m^2 \cdot 0{,}08\ m$

$V = 195{,}477\ m^3$

zu 5.)

a.)

$V = \pi r^2 \cdot h$

$h = \frac{V}{\pi r^2}$

$h = \frac{1000}{\pi \cdot 0{,}005^2}$

$h = 12.732.395\ mm$

$h = 12.732{,}4\ m$

b.)

$V = \pi r^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot 0{,}005^2 \cdot 1.000.000$

$V = 78{,}54\ mm^3$

$V = 0{,}07854\ cm^3$

$M = 0{,}07854 \cdot 19{,}3$

$M = 1{,}516\ g$

zu 6.)

a.)

$$V = V_{\text{Zylinder groß}} - V_{\text{Zylinder klein}}$$

$$V = \pi \cdot 175^2 \cdot 640 - \pi \cdot 160^2 \cdot 640$$

$$V = 61.575.216 - 51.471.854$$

$$V = 10.103.362 \text{ mm}^3$$

$$V = 10.103{,}362 \text{ cm}^3$$

$$M = 10.103{,}362 \text{ cm}^3 \cdot 7{,}3 \text{ g}$$

$$M = 73.754{,}543 \text{ g} = 73{,}755 \text{ kg}$$

b.)

$$O = M_{\text{Zylinder außen}} + M_{\text{Zylinder innen}} + 2 \cdot A_{\text{Kreisring}}$$

$$O = 2 \cdot \pi \cdot 175 \cdot 640 + 2 \cdot \pi \cdot 160 \cdot 640 + 2 \cdot (\pi \cdot 175^2 - \pi \cdot 160^2)$$

$$O = 703.716{,}75 + 643.398{,}18 + 2 \cdot 15.786{,}5$$

$$O = 1.378.687{,}93 \text{ mm}^2$$

$$O = 13.786{,}88 \text{ cm}^2$$

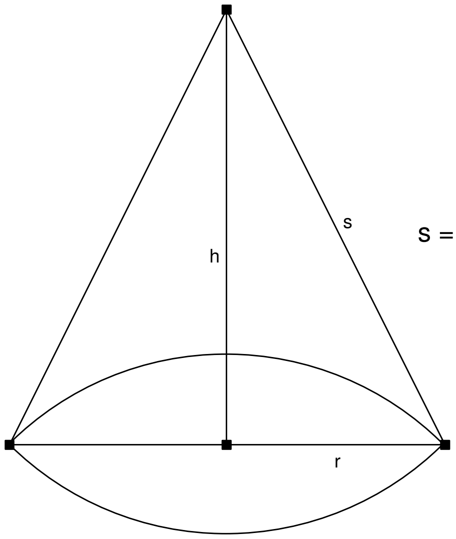
$$O = 1{,}38 \text{ m}^2$$

Der Kegel

Mantelfläche und Oberfläche:

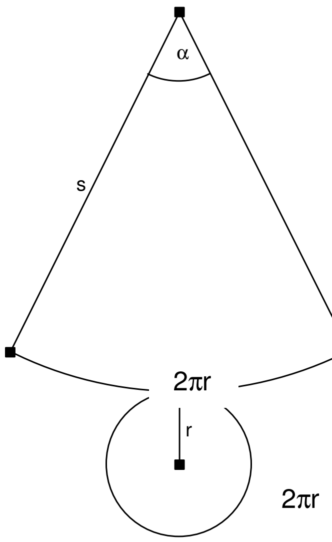
Nach Pythagoras ergibt sich:

$$s^2 = h^2 + r^2$$
$$h^2 = s^2 - r^2$$
$$r^2 = s^2 - h^2$$



s = Mantellinie

Wenn man einen Kegel aufklappt (abwickelt), so erhält man folgendes Bild:



Der Mantel des Kegels ist ein Kreissektor, der bestimmt wird durch die Größe des Winkels α (Mittelpunktswinkel).

Da die Mantelfläche (M) des Kegels einem Dreieck ähnelt, kann man sie berechnen mit:

$$M \approx D \approx A_S = \frac{b \cdot s}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot s}{2} = \pi \cdot r \cdot s$$

Die Oberfläche (O) des Kegels wird dann berechnet mit:

$$O = \text{Grundfläche} + \text{Mantel}$$
$$O = \pi r^2 + \pi rs$$
$$O = \pi r \cdot (r + s)$$

außerdem:

$$\frac{\alpha}{2\pi r} = \frac{360°}{2\pi s}$$
$$\alpha = \frac{r \cdot 360°}{s}$$

Volumen des Kegels:

Das Volumen eines Kegels wird berechnet mit:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Aufgabe:

Löse die Volumenformel des Kegels nach r und h auf:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$
$$3 \cdot V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2} = h$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$
$$3 \cdot V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$\sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}} = r$$

Aufgabe:

Ein Kegel hat einen Radius (r) von 3,5 cm und eine Höhe (h) von 8,5 cm. Bestimme die Oberfläche und das Volumen dieses Kegels.

$s^2 = h^2 + r^2$

$s = \sqrt{8{,}5^2 + 3{,}5^2}$

$s = 9{,}2 \text{ cm}$

$O = \pi r \cdot (r + s)$

$O = \pi \cdot 3{,}5 \cdot (3{,}5 + 9{,}2)$

$O = 139{,}64 \text{ cm}^2$

$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$V = \frac{\pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 8{,}5}{3}$

$V = 109{,}039 \text{ cm}^3$

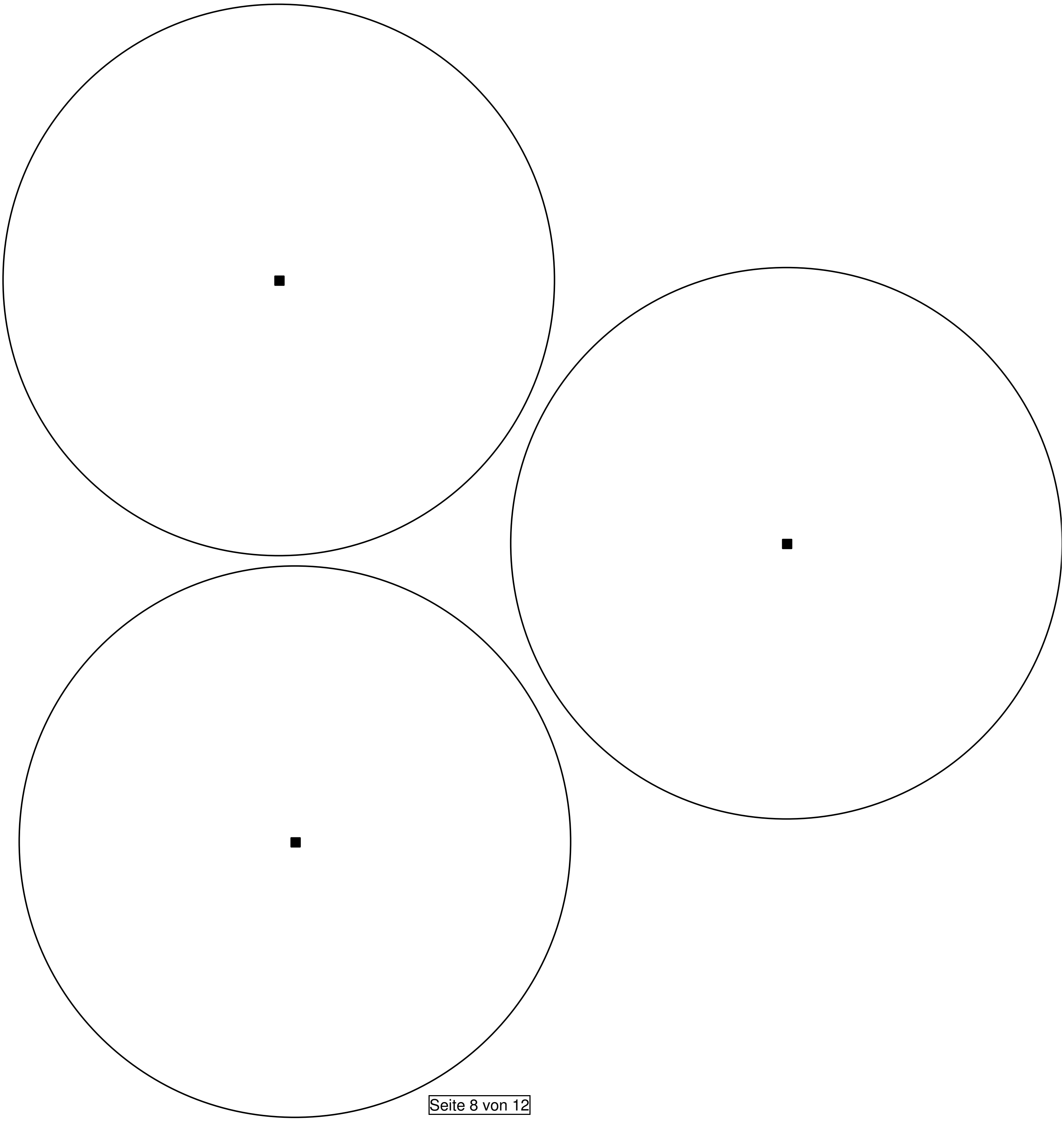
Mantelfläche (M) und Oberfläche (O) eines Kegels

Auf dem Arbeitsblatt sieht man drei Kreise mit s = 5 cm, die für die Mantelfläche von Kegeln dienen sollen. Schneide dazu die Kreise aus, schneide danach aus den Kreises Sektoren mit folgenden Winkelgrößen aus:

1. Kreis: Sektor mit $\alpha = 150°$
2. Kreis: Sektor mit $\alpha = 210°$
3. Kreis: Sektor mit $\alpha = 270°$

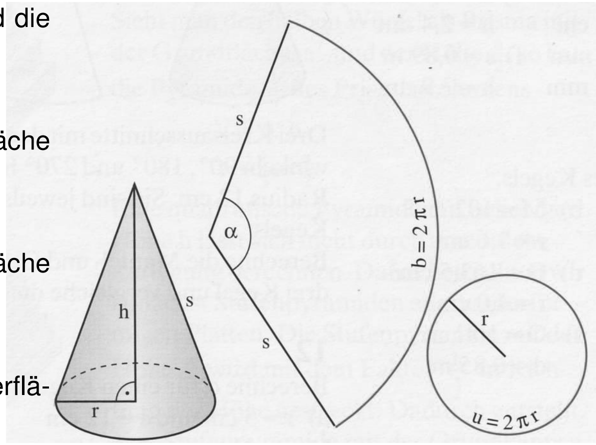
Forme die Sektoren zu einem Kegel. Was stellst du fest?

Berechne mit Hilfe der Formeln $\alpha = \frac{r \cdot 360°}{s}$; $M = \pi \cdot r \cdot s$; $O = \pi \cdot r^2 + \pi rs$ die Mantelfläche (M) und die Oberfläche (O) deiner Kegel.



Arbeitsblatt Kegel

1.) Berechne von einem Kegel:



a.) Die Länge der Seitenlinie (s), das Volumen (V) und die Oberfläche (O) aus:
Radius (r) = 6 cm; Kegelhöhe (h) = 8 cm.

b.) Die Kegelhöhe (h), das Volumen (V) und die Oberfläche (O) aus:
Durchmesser (d) = 18 cm; Seitenlinie (s) = 41 cm.

c.) Den Radius (r), das Volumen (V) und die Oberfläche (O) aus:
Seitenlinie (s) = 25 cm; Kegelhöhe (h) = 20 cm.

d.) Die Kegelhöhe (h), die Seitenlinie (s) und die Oberfläche (O) aus:
Radius (r) = 9 cm; Volumen (V) = 400 cm^3.

e.) Die Seitenlinie (s), die Kegelhöhe (h) und das Volumen (V) aus:
Radius (r) = 5 cm; Oberfläche (O) = 200 cm^2.

2.) Ein kegelförmiges Trinkglas soll 0,15 Liter fassen und am oberen Rand einen Durchmesser (d) von 5 cm aufweisen.

Wie hoch muss das Glas (ohne Fuß) sein?

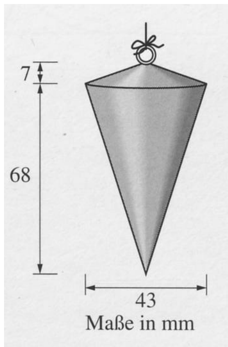
3.) Aus einem Viertelkreis, einem Halbkreis und einem Dreiviertelkreis, jeweils mit dem Radius 10 cm, werden offene Kegel geformt.

Berechne jeweils ihr Volumen (V) und ihre Oberfläche (O). Beachte dabei den Unterschied zwischen dem Radius der Mantelfläche (s) und dem Grundkreisradius (r).

4.) Über ein Förderband werden 525,9 m^3 Salz kegelförmig aufgeschüttet. Welche Bodenfläche (A) bedeckt der Salzhaufen, wenn er 6,2 m hoch ist?

5.) Ein kegelförmiges Senklot aus Stahl mit einem Durchmesser (d) von 43 mm ist insgesamt 75 mm hoch.

a.) Wie groß ist sein Gewicht (M), wenn 1 cm^3 Stahl 7,8 Gramm wiegt?
b.) Das Senklot soll mit eingefärbt werden. Wie viel cm^2 müssen mit Farbe versehen werden?



6.) 6 cm lange Bleistiftminen mit einem Durchmesser von 2 mm werden bei der Produktion auf 5 mm Länge angespitzt.

Wie viel Prozent des Gesamtvolumens gehen dabei als Abfall verloren?

Arbeitsblatt Kegel (Lösungen)

zu 1.)

a.)

$s^2 = h^2 + r^2$

$s = \sqrt{6^2 + 8^2}$

$s = 10 \text{ cm}$

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

$V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3}$

$V = 301{,}593 \text{ cm}^3$

$O = \pi r^2 + \pi rs$

$O = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10$

$O = 301{,}59 \text{ cm}^2$

b.)

$h^2 = s^2 - r^2$

$h = \sqrt{41^2 - 9^2}$

$h = 40 \text{ cm}$

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

$V = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot 40}{3}$

$V = 3392{,}92 \text{ cm}^3$

$O = \pi r^2 + \pi rs$

$O = \pi \cdot 9^2 + \pi \cdot 9 \cdot 41$

$O = 1413{,}72 \text{ cm}^2$

c.)

$r^2 = s^2 - h^2$

$r = \sqrt{25^2 - 20^2}$

$r = 15 \text{ cm}$

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

$V = \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 20}{3}$

$V = 4712{,}389 \text{ cm}^3$

$O = \pi r^2 + \pi rs$

$O = \pi \cdot 15^2 + \pi \cdot 15 \cdot 25$

$O = 1884{,}96 \text{ cm}^2$

d.)

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

$h = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2}$

$h = \frac{3 \cdot 400}{\pi \cdot 9^2}$

$h = 4{,}7 \text{ cm}$

$s^2 = h^2 + r^2$

$s = \sqrt{4{,}7^2 + 9^2}$

$s = 10{,}2 \text{ cm}$

$O = \pi r^2 + \pi rs$

$O = \pi \cdot 9^2 + \pi \cdot 9 \cdot 10{,}2$

$O = 542{,}87 \text{ cm}^2$

e.)

$O = \pi r^2 + \pi rs$

$s = \frac{O - \pi r^2}{\pi r}$

$s = \frac{200 - \pi \cdot 5^2}{\pi \cdot 5}$

$s = 7{,}7 \text{ cm}$

$h^2 = s^2 - r^2$

$h = \sqrt{7{,}7^2 - 5^2}$

$h = 5{,}9 \text{ cm}$

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

$V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 5{,}9}{3}$

$V = 154{,}462 \text{ cm}^3$

zu 2.)

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ $\quad h = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2}$ $\quad h = \frac{3 \cdot 150}{\pi \cdot 2{,}5^2}$ $\quad h = 22{,}9\ \text{cm}$

---

zu 3.)

Viertelkreis $\Rightarrow \alpha = 90°$	Halbkreis $\Rightarrow \alpha = 180°$	Dreiviertelkreis $\Rightarrow \alpha = 270°$
$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$ $\quad r = s = 10\ \text{cm}$	$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$ $\quad r = s = 10\ \text{cm}$	$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$ $\quad r = s = 10\ \text{cm}$
$b = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 90}{180}$	$b = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 180}{180}$	$b = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 270}{180}$
$b = 15{,}7\ \text{cm}$	$b = 31{,}4\ \text{cm}$	$b = 47{,}1\ \text{cm}$
$r_{Grundkreis} = 2{,}5\ \text{cm}$	$r_{Grundkreis} = 5\ \text{cm}$	$r_{Grundkreis} = 7{,}5\ \text{cm}$
$h = \sqrt{10^2 - 2{,}5^2}$	$h = \sqrt{10^2 - 5^2}$	$h = \sqrt{10^2 - 7{,}5^2}$
$h = 9{,}7\ \text{cm}$	$h = 8{,}7\ \text{cm}$	$h = 6{,}6\ \text{cm}$
$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$	$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$	$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$
$V = \frac{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 9{,}7}{3}$	$V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 8{,}7}{3}$	$V = \frac{\pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 6{,}6}{3}$
$V = 63{,}486\ \text{cm}^3$	$V = 227{,}765\ \text{cm}^3$	$V = 388{,}772\ \text{cm}^3$
$O = \pi rs$ $\quad$ (Offener Kegel!)	$O = \pi rs$	$O = \pi rs$
$O = \pi \cdot 2{,}5 \cdot 10$	$O = \pi \cdot 5 \cdot 10$	$O = \pi \cdot 7{,}5 \cdot 10$
$O = 78{,}54\ \text{cm}^2$	$O = 157{,}08\ \text{cm}^2$	$O = 235{,}62\ \text{cm}^2$

---

zu 4.)

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ $\quad r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}}$ $\quad r = \sqrt{\frac{3 \cdot 525{,}9}{\pi \cdot 6{,}2}}$ $\quad r = 9\ \text{m}$

$A = \pi \cdot r^2$ $\quad A = \pi \cdot 9^2$ $\quad A = 254{,}47\ \text{m}^2$

---

zu 5.)

$V = V_{kleiner\ Kegel} + V_{großer\ Kegel}$

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h_k}{3} + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h_g}{3}$

$V = \frac{\pi \cdot 21{,}5^2 \cdot 7}{3} + \frac{\pi \cdot 21{,}5^2 \cdot 68}{3}$

$V = 3388{,}469 + 32916{,}561$

$V = 36305{,}03\ \text{mm}^3 = 36{,}305\ \text{cm}^3$

$M = V \cdot \rho$

$M = 36{,}305 \cdot 7{,}8$

$M = 283{,}179\ \text{g}$

$s_k = \sqrt{7^2 + 21{,}5^2}$

$s_k = 22{,}6\ \text{mm}$

$s_g = \sqrt{68^2 + 21{,}5^2}$

$s_g = 71{,}3\ \text{mm}$

$O = M_{kleiner\ Kegel} + M_{großer\ Kegel}$

$O = \pi \cdot r \cdot s_k + \pi \cdot r \cdot s_g$

$O = \pi \cdot 21{,}5 \cdot 22{,}6 + \pi \cdot 21{,}5 \cdot 71{,}3$

$O = 1526{,}5 + 4815{,}9$

$O = 6342{,}4\ \text{mm}^2 = 63{,}42\ \text{cm}^2$

zu 6.)

$$V = V_{\text{Zylinder (Höhe 5mm)}} - V_{\text{Kegel}}$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 5 - \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 5}{3}$$

$$V = 15{,}708 - 5{,}236$$

$$V = 10{,}472\ \text{mm}^3\ \text{(Abfall)}$$

$$V_{\text{Mine}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{Mine}} = \pi \cdot 1^2 \cdot 60$$

$$V_{\text{Mine}} = 188{,}5\ \text{mm}^3$$

$$p = \frac{Pw \cdot 100}{G}$$

$$p = \frac{10{,}472 \cdot 100}{188{,}5}$$

$$p = 5{,}56\%$$
